

**Funktionentheoretische Eigenschaften
komplexer Räume**

Hans Kerner

Funktionentheoretische Eigenschaften

komplexer Räume.

Preisschrift

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ludwig-Maximilians-Universität

zu München.

Vorgelegt

von

Hans Kerner

aus

Landshut

Juli 1958



Berichterstatter: Professor Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1958

Inhalt

Einleitung	1
0. Einleitende Bemerkungen	6
a) Komplexe Räume	6
b) Gebiete über einem komplexen Raum	9
1. Konvergente Folgen von unverzweigten Holomorphie- gebieten	15
a) Folgen von pseudokonvexen Gebieten	15
b) Die Stetigkeit der Hüllenzuordnung	18
c) Meromorph-konvexe Gebiete	21
2. Holomorphe Abbildungen	22
a) Abbildungen in holomorph-vollständige komplexe Räume	22
b) Fortsetzung holomorpher Abbildungen	25
c) Eigentliche Abbildungen	28
3. Holomorphiehüllen zu verzweigten Riemannschen Gebieten	33
4. Holomorphiehüllen zu K-vollständigen komplexen Räumen	42
a) Die Existenz der K-Hülle	42
b) ϕ -Hülle und K-Hülle	48

1. Konkrete Folgen von unversicherten Holzernte-	12
gebieten	12
a) Folgen von Brandkatastrophen	12
b) Die Statistik der Holzernte	18
c) Wirtschaftliche Folgen	20
2. Holzernte in den Gebieten	22
a) Holzernte in den Gebieten	22
b) Holzernte in den Gebieten	25
c) Holzernte in den Gebieten	28
3. Holzernte in den Gebieten	30
a) Holzernte in den Gebieten	30
b) Holzernte in den Gebieten	35
c) Holzernte in den Gebieten	40
4. Holzernte in den Gebieten	45
a) Holzernte in den Gebieten	45
b) Holzernte in den Gebieten	50
c) Holzernte in den Gebieten	55
5. Holzernte in den Gebieten	60
a) Holzernte in den Gebieten	60
b) Holzernte in den Gebieten	65
c) Holzernte in den Gebieten	70
6. Holzernte in den Gebieten	75
a) Holzernte in den Gebieten	75
b) Holzernte in den Gebieten	80
c) Holzernte in den Gebieten	85
7. Holzernte in den Gebieten	90
a) Holzernte in den Gebieten	90
b) Holzernte in den Gebieten	95
c) Holzernte in den Gebieten	100

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung.

Man kennt seit langer Zeit Beispiele dafür, daß komplexe Räume, die analytisch nicht äquivalent sind, hinsichtlich gewisser funktionentheoretischer Eigenschaften als äquivalent zu betrachten sind. So kann es etwa vorkommen, daß zwei unverzweigte Riemannsche Gebiete völlig verschiedene topologische Eigenschaften besitzen, aber die Ringe der in ihnen holomorphen Funktionen isomorph sind. Diese Erscheinung hat zum Begriff der Holomorphiehülle geführt. Die Entwicklung der Funktionentheorie in den letzten 25 Jahren hat gezeigt, daß die Holomorphiehülle zu den wichtigsten Begriffen der Funktionentheorie mehrerer komplexen Veränderlichen gehört. Bisher hat man sich darauf beschränkt, unverzweigten Riemannschen Gebieten eine Holomorphiehülle zuzuordnen. Wir wollen in dieser Arbeit einerseits Aussagen beweisen, die sich vor allem mit unverzweigten Gebieten und deren Hüllen befassen. Andererseits ist es erwünscht, bei der Behandlung funktionentheoretischer Eigenschaften komplexer Räume über den Begriff der Holomorphiehülle nicht nur für unverzweigte Riemannsche Gebiete zu verfügen. Wir zeigen, wie man jedem K -vollständigen komplexen Raum eine Holomorphiehülle zuordnen kann.

In Abschnitt 1 behandeln wir konvergente Folgen von unverzweigten Gebieten. Bereits im Jahre 1906 hat Hartogs in seiner für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen grundlegenden Arbeit erkannt, daß nicht jedes Gebiet Holo-

morphiegebiet ist. Es ist nun nützlich, Bedingungen zu kennen, wann ein Gebiet Holomorphiegebiet ist. Ein Kriterium dieser Art stellt der Konvergenzsatz von H. Behnke und K. Stein dar, der besagt: Das Grenzgebiet einer konvergenten Folge von unverzweigten Holomorphiegebieten ist wieder ein Holomorphiegebiet. Dieser Satz wurde von H. Behnke und K. Stein zuerst für schlichte und später für fast-endlichblättrige Gebiete bewiesen ([1] 1938, [2] 1949). Für Ausschöpfungsfolgen haben H. Grauert und R. Remmert einen Beweis gegeben ([10] 1957). Wir beweisen nun den Konvergenzsatz für beliebige Folgen unverzweigter Riemannscher Gebiete (Satz 3).

Mit Hilfe von Satz 3 kann man untersuchen, wann die Hüllenzuordnung "stetig" ist, d.h. unter welchen Bedingungen $H(\lim G_i) = \lim H(G_i)$ gilt. Dieses Problem wurde für schlichte Gebiete mit schlichten Hüllen 1938 von H. Behnke und K. Stein ([1]) gelöst. Wir beweisen die entsprechenden Aussagen für beliebige unverzweigte Riemannsche Gebiete (Satz 4 und Satz 5).

Als Anwendung von Satz 3 ergibt sich noch ein Beweis dafür, daß bei unverzweigten Riemannschen Gebieten die Begriffe meromorph-konvex und holomorph-konvex übereinstimmen (Satz 6).

Abschnitt 2 befaßt sich mit holomorphen Abbildungen komplexer Räume. Jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ eines komplexen Raumes X in einen komplexen Raum Y induziert bekanntlich einen Homomorphismus $\tau^*: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ des Rings $\mathcal{R}(Y)$ der in Y holomorphen Funktionen in den Ring $\mathcal{R}(X)$. Wir stellen die umgekehrte Frage, ob unter gewissen Bedingungen zu jedem Homomorphismus τ^* eine holomorphe Abbildung τ existiert, die ihn induziert. Mit Hilfe von Sätzen von R. Remmert ergibt sich:

Ist Y ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, dann wird jeder Homomorphismus $\tau: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$, der den Körper der komplexen Zahlen festläßt, durch eine Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ erzeugt (Satz 7).

Satz 7 gestattet einige Anwendungen. Man kennt Bedingungen dafür, daß alle in einem komplexen Raum holomorphen Funktionen fortsetzbar sind. An Stelle der Funktionen betrachten wir Abbildungen in holomorph-vollständige komplexe Räume. Dann gilt: Sind alle holomorphen Funktionen fortsetzbar, dann sind es auch alle holomorphen Abbildungen in holomorph-vollständige komplexe Räume (Satz 9).

Für unverzweigte Riemannsche Gebiete ergibt sich (Satz 11): Jede holomorphe Abbildung unverzweigter Riemannscher Gebiete ineinander induziert eine holomorphe Abbildung ihrer Holomorphiehüllen.

Wird ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet eigentlich und holomorph auf ein anderes Gebiet abgebildet, so ist auch die induzierte Abbildung der Holomorphiehüllen eine eigentliche Abbildung (Satz 16). Das bedeutet, daß jede endlich-blättrige analytisch-verzweigte Überlagerung Riemannscher Gebiete zur Überlagerung ihrer Hüllen fortsetzbar ist.

Dabei ergibt sich noch (Satz 15): Wenn ein holomorph-konvexer komplexer Raum eigentlich und nirgends entartet auf einen komplexen Raum abgebildet werden kann, so ist auch der Bildraum holomorph-konvex.

In den Abschnitten 3 und 4 wenden wir uns der Frage zu, ob man auch für eine allgemeinere Klasse von komplexen Räumen Holomorphiehüllen erklären kann.

Im Jahre 1932 hat P. Thullen gezeigt, daß man jedem unverzweigten Riemannschen Gebiet eine Holomorphiehülle zuordnen kann. Für die systematische Behandlung funktionentheoretischer Eigenschaften unverzweigter Riemannscher Gebiete ist die Holomorphiehülle zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Die Entwicklung der Funktionentheorie wie auch der Topologie hat in jüngster Zeit dazu geführt, auch verzweigte Riemannsche Gebiete und, noch allgemeiner, komplexe Räume zu betrachten. Es ist daher notwendig, für allgemeinere Gebilde als es die unverzweigten Riemannschen Gebiete sind, eine Holomorphiehülle zu definieren und deren Existenz nachzuweisen.

Wir beweisen zuerst, daß man jedem (verzweigten) Riemannschen Gebiet (X, ϕ, C^n) eine Holomorphiehülle zuordnen kann (Satz 19). Es zeigt sich jedoch, daß diese Hülle nicht invariant gegenüber eindeutigen holomorphen Abbildungen ist. Diese Hülle hängt vielmehr von der Projektionsabbildung ϕ ab, durch die der komplexe Raum X dem C^n überlagert wird. Wir nennen diese Holomorphiehülle daher die ϕ -Hülle. Es ist bekannt, daß die von P. Thullen definierten unverzweigten Hüllen gegenüber eindeutigen holomorphen Abbildungen invariant sind. Aus diesem Grunde darf man vermuten, daß die ϕ -Hülle von diesem Standpunkt aus betrachtet noch nicht das genaue Analogon zu den unverzweigten Hüllen darstellt. Eine Klärung dieser Frage bringen die Untersuchungen, die wir in Abschnitt 4 durchführen.

In der klassischen Theorie der Funktionen einer Veränderlichen hat man die Riemannschen Flächen zunächst als Überlagerungsflächen der komplexen Ebene definiert. Man ist jedoch

bald dazu übergegangen, Riemannsche Flächen als abstrakte Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Die entsprechende Entwicklung in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen hat zum Begriff des komplexen Raumes, insbesondere des K -vollständigen komplexen Raumes, geführt. Wir zeigen nun, daß es möglich ist, jedem K -vollständigen komplexen Raum eine Holomorphiehülle zuzuordnen (Satz 20). Diese Hülle nennen wir die K -Hülle. Man kann beweisen, daß die K -Hülle invariant ist gegenüber eindeutigen holomorphen Abbildungen (Satz 21).

Jedes Riemannsche Gebiet (X, ϕ, C^n) ist ein K -vollständiger komplexer Raum. Man kann daher die ϕ -Hülle und die K -Hülle bilden. Die ϕ -Hülle ist als offenes dichtes Teilgebiet in der K -Hülle enthalten (Satz 22). Die beiden Hüllen unterscheiden sich genau um die Entartungsmenge der in die K -Hülle fortgesetzten Projektionsabbildung ϕ . Die Verschiedenheit von ϕ -Hülle und K -Hülle ist auch der Grund dafür, daß die ϕ -Hülle im allgemeinen nicht holomorph-konvex ist (Satz 24) (Vgl. die von H. Grauert und R. Remmert in [10] angegebenen Beispiele).

Für unverzweigte Riemannsche Gebiete fallen die ϕ -Hülle und die K -Hülle mit der von P. Thullen definierten unverzweigten Hülle zusammen (Satz 26).

0. Einleitende Bemerkungen.

a) Komplexe Räume.

Wir benötigen zuerst einige topologische Begriffe (Vgl. dazu [4] und [16]). Es sei R ein lokal-zusammenhängender topologischer Raum. Eine abgeschlossene Teilmenge M von R heißt nirgends zerlegend in R , wenn es zu jedem Punkt von M beliebig kleine offene zusammenhängende Umgebungen U gibt, so daß $U \cap (U \cap M)$ nichtleer und zusammenhängend ist.

Es seien R_1 und R_2 lokalkompakte Hausdorffsche Räume, $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ eine Abbildung von R_1 in R_2 . φ heißt eigentlich, wenn für jede kompakte Menge $K \subset R_2$ das Urbild $\varphi^{-1}(K) \subset R_1$ kompakt ist. φ heißt nirgends entartet, wenn für jeden Punkt $p \in R_2$ die Faser $\varphi^{-1}(p) \subset R_1$ höchstens aus isolierten Punkten besteht.

Unter einem Filter $\mathcal{f}$ auf einem Raum R wollen wir hier ein nichtleeres System von nichtleeren Teilmengen von R verstehen, das die Eigenschaft besitzt: Zu $U, V \in \mathcal{f}$ gibt es immer ein $W \in \mathcal{f}$ mit $W \subset U \cap V$.

Wir beweisen einen Hilfssatz, den wir später mehrmals anwenden werden.

Hilfssatz 1 : Es seien X und Y lokal-kompakte lokal-zusammenhängende Hausdorffsche Räume und $\varphi: X \rightarrow Y$ eine stetige und nirgends entartete Abbildung von X in Y . Ist dann $\mathcal{f}$ ein Filter von zusammenhängenden Teilmengen von X und konvergiert das Filter $\varphi(\mathcal{f})$, so gilt: Entweder besitzt $\mathcal{f}$ keinen Häufungspunkt in X oder $\mathcal{f}$ konvergiert gegen einen Punkt von X .

Beweis: Es sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von X . Wir zeigen, daß

dann f gegen x konvergiert. Es gibt eine offene Umgebung U von x mit folgender Eigenschaft: $\varphi|U$ ¹⁾ ist eine eigentliche Abbildung von U in eine Umgebung W von $\varphi(x)$ (Vgl. K. Stein, [16], Hilfssatz 3). Es sei W_1 eine Umgebung von $\varphi(x)$, die relativ-kompakt in W liegt. Dann ist $U_1 := \tilde{\varphi}^{-1}(W_1) \cap U$ eine Umgebung von x mit $U_1 \subset\subset U$. $\varphi(f)$ konvergiert gegen $\varphi(x)$. Daher gibt es ein $F \in f$ mit $\varphi(F) \subset W_1$; also ist $F \subset \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(F)) \subset \tilde{\varphi}^{-1}(W_1)$. Die Menge $F \cap U =: F_1$ ist nicht leer, weil x ein Häufungspunkt von f ist. Wir betrachten nun F als Teilraum von X , versehen mit der induzierten Topologie. Bezüglich dieser Topologie ist F_1 eine offene Teilmenge von F . F_1 ist auch eine abgeschlossene Teilmenge von F , denn jeder Häufungspunkt p von F_1 , der in F liegt, gehört wegen $F_1 \subset U_1 \subset\subset U$ zu U ; daher gehört p zu $F \cap U = F_1$. Also ist F_1 eine nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge von F . Nach Voraussetzung ist F zusammenhängend; somit ist $F = F_1$, also $F \subset U$. Das bedeutet, daß es zu jeder Umgebung U von x ein $F \in f$ gibt mit $F \subset U$; d.h. f konvergiert gegen x .

Wir erklären nun den für die Definition des komplexen Raumes grundlegenden Begriff der analytisch-verzweigten Überlagerung eines Polyzylinders. (Zu den folgenden Definitionen vgl. K. Stein [16] und H. Grauert u. R. Remmert [9]).

Def. 1 : Ein Tripel (R, φ, E) heißt eine analytisch-verzweigte Überlagerung eines Polyzylinders $E \subset \mathbb{C}^n$, wenn gilt:

1. R ist ein lokal-kompakter zusammenhängender Hausdorffscher Raum und $\varphi: R \rightarrow E$ eine stetige eigentliche nirgends entartete Abbildung von R auf E .

2. Es gibt eine (evtl. leere) analytische Menge M in E , $M \neq E$,

1) $\phi|U$ bedeutet die Beschränkung der Abbildung ϕ auf U .

derart daß $\varphi|_R = \tilde{\varphi}'(M)$ eine lokaltopologische Abbildung ist.

3. $\tilde{\varphi}'(M)$ zerlegt nirgends in R .

Wir sagen auch, (R, φ, E, M) ist eine analytisch-verzweigte Überlagerung von E mit Verzweigungspunkten höchstens über M .

Auf dem zu (R, φ, E) gehörenden Raum R wird wie üblich der Begriff der holomorphen Abbildung erklärt.

Ist X ein lokal-zusammenhängender Hausdorffscher Raum und U eine offene Teilmenge von X , so heißt $(U, \psi) = (U, \psi, R, \varphi, E, M)$ eine komplexe Karte auf X , wenn ψ eine topologische Abbildung von U auf den zur analytisch-verzweigten Überlagerung (R, φ, E, M) gehörenden Raum R ist. Zwei komplexe Karten (U_i, ψ_i) und (U_j, ψ_j) erfüllen die Verträglichkeitsbedingung, wenn entweder $U_i \cap U_j$ leer ist oder die Abbildung $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j)$ holomorph ist.

Def. 2 : Eine Menge (U_i, ψ_i) (i durchlaufe eine Indexmenge I) von komplexen Karten auf einen Hausdorffschen Raum X heißt eine komplexe Struktur auf X , wenn die U_i eine Überdeckung von X bilden und je zwei komplexe Karten die Verträglichkeitsbedingung erfüllen.- Ein zusammenhängender Hausdorffscher Raum X mit einer fest vorgegebenen komplexen Struktur heißt ein komplexer Raum.

Die Begriffe holomorphe Abbildung, holomorph-vollständig u.s.w. seien wie in [7] und [16] erklärt. Bei vielen Überlagerungen müssen wir uns auf komplexe C -Räume beschränken. Wir benützen in diesen Fällen den von H. Grauert und R. Remmert bewiesenen Satz, daß jeder komplexe Raum der C -Bedingung genügt.

Wir beweisen noch einen Hilfssatz:

Hilfssatz 2 : Es seien X, Y, Z komplexe Räume, $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung von X in Y und $\varphi: X \rightarrow Z$ eine eigentliche lokal-topologische holomorphe Abbildung von X auf Z .

$S(f)$ sei die Menge aller Punkte $z \in Z$ mit folgender Eigenschaft: Zu z gibt es zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = z$ und $f(x_1) = f(x_2)$. Dann ist $S(f)$ eine analytische Menge in Z .

Beweis: 1) $S(f)$ ist abgeschlossen in Z . - Ist $z \in Z - S(f)$ und sind $x_1, \dots, x_s$ die Punkte von $\varphi^{-1}(z)$, dann sind die Punkte $f(x_1), \dots, f(x_s)$ voneinander verschieden. Es gibt paarweise fremde Umgebungen $V(f(x_1)), \dots, V(f(x_s))$. Dann ist $\bigcup_{\sigma=1}^s \tilde{V}(V(f(x_\sigma))) =: U$ eine Umgebung von $\varphi^{-1}(z)$. Es gibt dazu eine Umgebung W von z mit $\varphi^{-1}(W) \subset U$ (vgl. K. Stein, [16], Hilfssatz 1); offenbar ist $W \cap S(f) = \emptyset$. 2) Ist $z_0 \in S(f)$, so seien U_σ schlichte Umgebungen von x_σ ($\sigma=1, \dots, s$); die Abbildungen $\varphi_\sigma := \varphi|_{U_\sigma}$ sind dann umkehrbar holomorph. In einer Umgebung W von z_0 wird dann $S(f)$ gegeben als Vereinigung des Nullstellengebildes endlich vieler Gleichungen $f \circ \varphi_\sigma^{-1} = f \circ \varphi_\tau^{-1}$ ($\sigma, \tau=1, \dots, s$). Eine Umgebung von $f \circ \varphi_\sigma^{-1}(z_0)$ wird durch lokal-holomorphe Funktionen h_x ($x=1, \dots, k$) separiert. Die Gleichung $f \circ \varphi_\sigma^{-1} = f \circ \varphi_\tau^{-1}$ ist dann in einer Umgebung von z_0 äquivalent mit den Gleichungen $h_x \circ f \circ \varphi_\sigma^{-1} - h_x \circ f \circ \varphi_\tau^{-1} = 0$.

b) Gebiete über einem komplexen Raum.

Def. 3 : Ein Tripel (X, ϕ, B) heißt ein Gebiet über B , wenn X und B komplexe Räume sind und $\phi: X \rightarrow B$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung von X in B ist.

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir für das Tripel (X, ϕ, B) oft nur X . Ist B der Raum C^n der n komplexen Veränderlichen $(z_1, \dots, z_n)$, so heißt (X, ϕ, C^n) ein Riemannsches Gebiet.

Ist ϕ lokal-topologisch, so heißt (X, ϕ, B) unverzweigt (ber B).

Wir betrachten zwei Gebiete (X_1, ϕ_1, B) und (X_2, ϕ_2, B) als identisch, wenn es eine umkehrbar-holomorphe Abbildung $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ von X_1 auf X_2 mit $\phi_1 = \phi_2 \circ \varphi$ gibt. Wir sagen, (X_1, ϕ_1, B) liegt in (X_2, ϕ_2, B) , wenn es eine holomorphe Abbildung $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ von X_1 in X_2 gibt mit $\phi_1 = \phi_2 \circ \psi$. Wir schreiben dafür $(X_1, \phi_1, B) < (X_2, \phi_2, B)$ oder kurz $X_1 < X_2$. Ist $X_1 < X_2$ und liegt $\psi(X_1)$ relativ-kompakt in X_2 , so sagen wir, X_1 liegt ganz in X_2 , in Zeichen $X_1 \ll X_2$.

Man definiert (vgl. H. Grauert und R. Remmert [10]):

Def. 4 : Ein Randpunkt eines Gebietes (X, ϕ, B) ist ein Filter r auf X mit folgenden Eigenschaften:

- a) r ist ein Filter von offenen zusammenhängenden Teilmengen von X .
- b) r besitzt in X keinen Häufungspunkt.
- c) $\phi(r)$ konvergiert gegen einen Punkt $b_0 \in B$.
- d) Ist $A \subset B$ eine offene Umgebung von b_0 , so gehört genau eine zusammenhängende Komponente von $\phi^{-1}(A)$ zu r . r wird durch diese Mengen erzeugt.

Die Menge aller Randpunkte von (X, ϕ, B) bezeichnen wir kurz mit RdX . In $\bar{X} := X \cup RdX$ fhrt man eine Topologie ein: Eine Umgebung von $r_0 \in RdX$ ist eine Menge $U \ni r_0$ vereinigt mit allen $r \in RdX$, zu denen ein $V \ni r$ mit $V \subset U$ existiert. $\bar{X}$ ist ein Hausdorffscher Raum. Durch die Festsetzung $\bar{\phi}(x) := \phi(x), x \in X$, und $\bar{\phi}(r) := b_0, r \in RdX$, wird ϕ zu einer stetigen Abbildung $\bar{\phi}: \bar{X} \rightarrow B$ fortgesetzt.

Aus Forderung a) in Def. 4 ergibt sich unmittelbar, daß RdX nirgends zerlegend in $\bar{X}$ ist.

Für unverzweigte Gebiete wollen wir noch Durchschnitt und Limes erklären.

Es seien unverzweigte Gebiete (X_i, ϕ_i, B) , $i \in I$ (I Indexmenge), und ein unverzweigtes Gebiet (X_0, ϕ_0, B) mit $X_0 < X_i$ für alle $i \in I$ vorgegeben. Wir bezeichnen mit $\prod_{i \in I} X_i$ den Produktraum der X_i ; $\pi_i: \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ sei die Projektionsabbildung auf den Faktor X_i . Es sei D'' die Menge aller $x \in \prod_{i \in I} X_i$, so daß für jedes Paar $i, j \in I$ gilt: $\phi_i \circ \pi_i(x) = \phi_j \circ \pi_j(x)$. Wir setzen $\phi(x) := \phi_i \circ \pi_i(x)$, $x \in D''$, und denken uns D'' mit der induzierten Topologie versehen. D' sei der Teilraum von D'' , auf dem ϕ lokal-topologisch ist. Es gibt eine natürliche Abbildung ψ von X_0 in D' . Die zusammenhängende Komponente von D' , in der $\psi(X_0)$ liegt, sei D . (D, ϕ, B) ist ein unverzweigtes Gebiet über B . Wir bezeichnen (D, ϕ, B) als den Durchschnitt der Gebiete (X_i, ϕ_i, B) bezüglich (X_0, ϕ_0, B) .¹⁾ (Vgl. dazu [3] und [5]). Wir notieren einige Eigenschaften des Durchschnitts:

(D 1) Es gilt $D < X_i$ für alle $i \in I$.

(D 2) Ist (X, ϕ, B) ein Gebiet mit $X < X_i$ für alle $i \in I$ und $X_0 < X$, so gilt $X < D$.

(D 3) Sind (X_i, ϕ_i, B) , $i \in I$, und (Y_i, ψ_i, B) , $i \in I$, Gebiete mit der Eigenschaft $X_i < Y_i$ für jedes $i \in I$, dann gilt: $\bigcap_{i \in I} X_i < \bigcap_{i \in I} Y_i$. (Die zusammenhängenden Komponenten sind dabei geeignet festzulegen.)

Nun benötigen wir den Begriff der gerichteten Indexmenge. Eine Indexmenge I heißt gerichtet, wenn gewisse Elemente $i, j \in I$ in einer Relation $i < j$ stehen und diese Relation folgende Eigenschaften besitzt: (1) Aus $i < j$ und $j < i$ folgt $i = j$ und umgekehrt. (2) Aus $i < j$ und $j < k$ folgt $i < k$. (3) Zu zwei beliebigen Elementen $i, j \in I$ gibt es stets ein $k \in I$, so daß

1) Wir schreiben dafür: $D = \bigcap_{i \in I} X_i$.

gilt: $i < k$ und $j < k$.

Eine Teilmenge I' von I heißt konfinal mit I , wenn es zu jedem $i \in I$ ein $i' \in I'$ gibt mit der Eigenschaft $i < i'$.

Jeder konfinalen Teilmenge I' von I ordnen wir eine gerichtete Menge $\overline{I'}$ zu: Die Elemente von $\overline{I'}$ seien alle Teilmengen J' von I' , die folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt ein $i'_0 \in I'$, so daß alle $i' \in I'$ mit $i'_0 < i'$ zu J' gehören. Die Ordnungsrelation in $\overline{I'}$ erklären wir folgendermaßen: Für $J', K' \in \overline{I'}$ soll $J' < K'$ genau dann gelten, wenn $J' \supset K'$ ist.

Eine Menge von Gebieten (X_i, ϕ_i, B) , $i \in I$ (I gerichtete Indexmenge), heißt eine Folge von Gebieten. Eine Folge heißt aufsteigend, wenn es zu jedem Paar $i, j \in I$ mit $i < j$ eine holomorphe Abbildung $\gamma_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ gibt mit $\phi_i = \phi_j \circ \gamma_{ij}$, so daß für $i < j < k$ gilt: $\gamma_{jk} \circ \gamma_{ij} = \gamma_{ik}$.

Wir definieren den Limes zuerst für aufsteigende Folgen von unverzweigten Gebieten. Es sei L die Menge aller Punkte $p \in \bigcap_{i \in I} X_i$ mit folgender Eigenschaft: Zu p gibt es ein $i_0 \in I$ so daß für alle $i > i_0$ gilt $\gamma_{i_0 i} \circ \pi_{i_0}(p) = \pi_i(p)$. (π_j sei wieder die Projektionsabbildung von $\bigcap_{i \in I} X_i$ auf X_j .) L ist, versehen mit der induzierten Topologie, ein Hausdorffscher Raum. In L erklären wir eine Äquivalenzrelation Z : Zwei Punkte $p, q \in L$ heißen Z -äquivalent, wenn es ein $i_1 \in I$ gibt, so daß für alle i mit $i_1 < i$ gilt: $\pi_i(p) = \pi_i(q)$. Der Zerlegungsraum $L/Z =: X$ ist ein Hausdorffscher Raum. Die natürliche Abbildung $\varphi: L \rightarrow L/Z$ ist eine stetige und offene Abbildung. Es gibt eine lokal-topologische Abbildung $\phi: X \rightarrow B$, die durch die Gleichung $\phi \circ \varphi = \phi_i \circ \pi_i$ (i hinreichend groß) gegeben ist. (X, ϕ, B) ist dann ein unverzweigtes Gebiet über B . Wir definieren:

Def. 5: Das Gebiet (X, ϕ, B) heißt das Grenzgebiet der aufsteigenden Folge (X_i, ϕ_i, B) , $i \in I$. Wir schreiben $X = \lim_{i \in I} X_i$.

Wir geben einige Eigenschaften des Grenzgebietes einer aufsteigenden Folge unverzweigter Gebiete an:

(L 1) Es gilt $X_i \subset X$ für jedes $i \in I$.

(L 2) Ist M eine kompakte Teilmenge von X , dann gibt es ein $i_0 \in I$, eine Menge $M_{i_0} \subset X_{i_0}$ und je eine Umgebung U_{i_0} von M_{i_0} und U von M mit folgenden Eigenschaften: Bezeichnen wir die Abbildung von X_{i_0} in X , die nach (L 1) existiert, mit ψ_{i_0} , so ist $\psi_{i_0}|_{U_{i_0}}$ eine topologische Abbildung von U_{i_0} auf U , die die Menge M_{i_0} topologisch auf M abbildet.

Beweis: Ist x ein Punkt von M , so gibt es ein $j(x) \in I$, so daß die Menge $\tilde{\psi}_{j(x)}^{-1}(x)$ nicht leer ist. Wir wählen einen Punkt $x_{j(x)} \in \tilde{\psi}_{j(x)}^{-1}(x)$. Zu $x_{j(x)}$ gibt es eine offene relativ-kompakte Umgebung $V_{j(x)}(x_{j(x)})$, die durch $\psi_{j(x)}$ lokal-topologisch auf eine Umgebung von x abgebildet wird. Wegen der Kompaktheit von M gibt es endlich viele Punkte $x^{(1)}, \dots, x^{(l)} \in M$, so daß M durch $\bigcup_{\lambda=1}^l \psi_{j(x^{(\lambda)})}(V_{j(x^{(\lambda)})})$ überdeckt wird. Wir können daher ein $j_0 \in I$ so wählen, daß gilt: $j(x^{(\lambda)}) < j_0$ für $\lambda = 1, \dots, l$. $\bigcup_{\lambda=1}^l \psi_{j(x^{(\lambda)})}(V_{j(x^{(\lambda)})}) =: V_{j_0}$ ist dann eine relativ-kompakte Teilmenge von X_{j_0} , die durch ψ_{j_0} lokal-topologisch auf eine Umgebung von M abgebildet wird. Die abgeschlossene Hülle $\tilde{V}_{j_0}$ von V_{j_0} ist kompakt. Daher ist auch $(\tilde{\psi}_{j_0}^{-1}(M)) \cap \tilde{V}_{j_0} =: N_{j_0}$ kompakt; es gilt $\psi_{j_0}(N_{j_0}) = M$. Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es einen Index $i(x) > j_0$, so daß die Menge $(\tilde{\psi}_{j_0}^{-1}(x)) \cap N_{j_0}$ durch $\psi_{j_0, i(x)}$ auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Durch $\psi_{j_0, i(x)}$ werden die Punkte von $(\tilde{\psi}_{j_0}^{-1}(x)) \cap N_{j_0}$ sogar in einer ganzen Umgebung identifiziert; genauer: Es gibt eine Umgebung $U(x)$, so daß für jedes $y \in U(x)$ die Menge $(\tilde{\psi}_{i(x)}^{-1}(y)) \cap (\psi_{j_0, i(x)}(N_{j_0})) \subset X_{i(x)}$ aus genau einem Punkt besteht. Es genügen wieder endlich viele Punkte $y^{(1)}, \dots, y^{(k)} \in M$

so daß die zugehörigen Umgebungen $U(y^{(1)}), \dots, U(y^{(k)})$ M überdecken. Wir wählen i_0 so, daß gilt $i(y^{(x)}) < i_0$ für $x=1, \dots, k$. Dann wird die Menge $\gamma_{j_0, i_0}(N_{j_0}) =: M_{i_0}$ durch ψ_{i_0} topologisch auf M abgebildet. Die Abbildung ψ_{i_0} ist noch in einer ganzen Umgebung U_{i_0} von M_{i_0} topologisch. Wir setzen $\psi_{i_0}(U_{i_0}) =: U$; damit ist (L 2) bewiesen.

Nun definieren wir, was wir unter Konvergenz einer beliebigen Folge von unverzweigten Gebieten $(X_i, \phi_i, B), i \in I$, verstehen wollen. I' sei eine konfinale Teilmenge von I . Wir bilden die zugeordnete gerichtete Menge $\overline{I'}$. Für jedes $J' \in \overline{I'}$ erklären wir: $D_{J'} := \bigcap_{j' \in J'} X_{j'}$. Wir denken uns dabei noch ein Gebiet X_0 mit $X_0 < X_i$ für alle $i \in I$ vorgegeben und die Durchschnitte $D_{J'}$, bezüglich X_0 gebildet. Die Gebiete $D_{J'}, J' \in \overline{I'}$, bilden eine aufsteigende Folge. Wenn die Limesgebiete der $D_{J'}, J' \in \overline{I'}$, für alle konfinalen Teilmengen I' von I übereinstimmen, so sagen wir, die Folge X_i konvergiert gegen $\lim_{J' \in \overline{I'}} D_{J'}$. Wir schreiben: $\lim_{J' \in \overline{I'}} D_{J'} = \lim_{i \in I} X_i$. (Die Limesbildung ist immer so zu verstehen, daß durch Vorgabe eines Gebietes X_0 ($X_0 < X_i$ für alle $i \in I$) eine zusammenhängende Komponente festgelegt wird.)

Es gilt:

(L 3) Sind $(X_i, \phi_i, B), i \in I$, und $(Y_i, \psi_i, B), i \in I$, zwei konvergente Folgen und gilt für jedes $i \in I$ $X_i < Y_i$, so ist $\lim_{i \in I} X_i < \lim_{i \in I} Y_i$. Für unverzweigte Gebiete erklären wir nun noch den Begriff der Pseudokonvexität (vgl. [10]).

Ist (X, ϕ, B) ein unverzweigtes Gebiet, so heißt eine Abbildung σ eines komplexen Raumes Y in $\overline{X}$ holomorph, wenn σ stetig und $\overline{\phi} \circ \sigma$ holomorph ist.

Es sei $\overline{K} = K \cup \partial K$ der Kreis $|w| \leq 1$ in einer komplexen Ebene und T das reelle Intervall $0 \leq t \leq 1$. Dann definieren wir:

Def. 6 : Unter einer Schar (eindimensionaler) analytischer Mengen in einem Gebiet (X, ϕ, B) verstehen wir eine stetige Abbildung $s(w, t): \bar{K} \times T \rightarrow \bar{X}$, die für jedes feste $t \in T$ holomorph¹⁾ und nicht konstant ist.

Eine Schar $s(w, t)$ analytischer Mengen heißt in (X, ϕ, B) ausgezeichnet, wenn gilt: $s(\bar{K}, t) \subset X$ für $0 \leq t < 1$ und $s(w, 1) \subset X$ für $w \in \text{Rd}K$.

Def. 7 : Ein Gebiet (X, ϕ, B) heißt pseudokonvex, wenn für jede ausgezeichnete Schar $s(w, t)$ von analytischen Mengen gilt: $s(\bar{K}, 1) \cap \text{Rd}X = \emptyset$.

1. Konvergente Folgen von unverzweigten

Holomorphiegebieten.

a) Folgen von pseudokonvexen Gebieten.

Wir beweisen in diesem Abschnitt, daß das Grenzgebiet einer konvergenten Folge unverzweigter Holomorphiegebiete wieder ein Holomorphiegebiet ist. Für Spezialfälle wurde diese Aussage bereits bewiesen in [1], [2] und [10].

Wir zeigen zuerst:

Satz 1 : Es sei $(X_i, \phi_i, B), i \in I$, eine aufsteigende Folge von unverzweigten pseudokonvexen Gebieten über einem komplexen Raum B . Dann ist auch $X := \lim_{i \in I} X_i$ pseudokonvex.

Beweis: Wir nehmen an, das Grenzgebiet (X, ϕ, B) sei nicht pseudokonvex. Dann gibt es eine in X ausgezeichnete Schar

1) Eine Abbildung heißt in $\bar{K} \subset \mathbb{C}^1$ holomorph, wenn sie in einer Umgebung $U(\bar{K}) \subset \mathbb{C}^1$ holomorph ist.

$\sigma(w, t): \bar{K} \times T \rightarrow \bar{X}$ mit $\sigma(\bar{K}, 1) \cap \text{Rd}X \neq \emptyset$. Die Menge $M := \sigma(\bar{K}, 0) \cup \sigma(\text{Rd}K, T)$ ist kompakt. Nach (L 2) gibt es dann ein $i_0 \in I$ und ein $U_{i_0} \subset X_{i_0}$, so daß $\varphi_{i_0} := \gamma_{i_0}|_{U_{i_0}}$ eine topologische Abbildung auf eine Umgebung U von M ist. (γ_{i_0} bezeichnet die Abbildung von X_{i_0} in X mit $\phi_{i_0} = \phi \circ \gamma_{i_0}$.) Es sei $V := \sigma^{-1}(U)$; dann ist durch $\sigma_{i_0} := \varphi_{i_0}^{-1} \circ \sigma|_V$ in der Umgebung V von $(\bar{K} \times 0) \cup (\text{Rd}K \times T)$ eine stetige Abbildung in X_{i_0} erklärt. Die Beschränkung von σ_{i_0} auf $(\bar{K} \times t) \cap V$ ist für jedes $t \in T$ eine holomorphe Abbildung. Wir betrachten σ_{i_0} zunächst nur als eine Abbildung in X_{i_0} , nicht in $\bar{X}_{i_0}$. Es wird nun untersucht, wie weit die Abbildung σ_{i_0} stetig fortsetzbar ist, so daß gilt $\sigma = \gamma_{i_0} \circ \sigma_{i_0}$. Wir zeigen: Die Abbildung σ_{i_0} ist so weit fortsetzbar, bis die Bildmenge den Rand von X_{i_0} erreicht.

Es sei v_0 ein Punkt von $K \times T$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Es gibt ein gegen v_0 konvergierendes Filter $\mathcal{f}$ von offenen zusammenhängenden Mengen $F \subset K \times T$, so daß σ_{i_0} auf jeder Menge $F \in \mathcal{f}$ erklärt und stetig ist.

b) σ_{i_0} ist nicht nach v_0 stetig fortsetzbar.

Wir beweisen, daß dann das Filter $\sigma_{i_0}(\mathcal{f})$ gegen einen Randpunkt von X_{i_0} konvergiert. Es gilt:

1) Das Filter $\sigma_{i_0}(\mathcal{f})$ besitzt in X_{i_0} keinen Häufungspunkt. - Wäre nämlich $x \in X_{i_0}$ ein Häufungspunkt von $\sigma_{i_0}(\mathcal{f})$, so würde nach Hilfssatz 1 $\sigma_{i_0}(\mathcal{f})$ gegen x konvergieren. r_{i_0} ist in einer Umgebung von x eineindeutig. Dann wäre $\sigma \circ \gamma_{i_0}^{-1}$ in einer Umgebung von v_0 eine Fortsetzung von σ_{i_0} .

2) $\phi_{i_0}(\sigma_{i_0}(\mathcal{f}))$ konvergiert gegen $\phi(\sigma(v_0)) \in B$. - σ ist in einer Umgebung von v_0 stetig. Wegen $\phi_{i_0} = \phi \circ \gamma_{i_0}$ und $\sigma = \gamma_{i_0} \circ \sigma_{i_0}$ folgt dann $\lim \phi_{i_0} \circ \sigma_{i_0}(\mathcal{f}) = \lim \phi \circ \gamma_{i_0} \circ \sigma_{i_0}(\mathcal{f}) = \lim \phi \circ \sigma(\mathcal{f}) = \phi \circ \sigma(\lim \mathcal{f}) = \phi \circ \sigma(v_0)$.

5) Ist $A \subset B$ eine Umgebung von $\phi \circ \sigma(v_0) \in B$, so gibt es ein $F \in \mathcal{F}$, so daß $\sigma_{i_0}(F)$ in genau einer zusammenhängenden Komponente von $\phi_{i_0}^{-1}(A)$ liegt. - Es genügt, $F \in \mathcal{F}$ so zu wählen, daß $\phi_{i_0} \circ \sigma_{i_0}(F)$ in A liegt; dies ist wegen der Stetigkeit von $\phi \circ \sigma = \phi_{i_0} \circ \sigma_{i_0}$ möglich.

Fassen wir jetzt σ_{i_0} als eine Abbildung in $\bar{X}_{i_0}$ auf, so ist σ_{i_0} nach v_0 fortsetzbar. Der Bildpunkt $\sigma_{i_0}(v_0)$ sei der Randpunkt von $\bar{X}_{i_0}$, gegen den das Filter $\sigma_{i_0}(\mathcal{F})$ konvergiert.

Nun sei t_1 das Supremum aller $t_0 \in T$, die die Eigenschaft besitzen: $\sigma_{i_0}|(\bar{K} \times t)$ ist für alle t mit $0 \leq t < t_0$ erklärt und es gilt $\sigma_{i_0}(\bar{K}, t) \subset X_{i_0}$. Dann ist σ_{i_0} auch noch in $(\bar{K}, t_1)$ definiert und es gilt $\sigma_{i_0}(\bar{K}, t) \subset X_{i_0}$ für $0 \leq t < t_1$, aber $\sigma_{i_0}(\bar{K}, t_1) \cap \text{Rd} X_{i_0} \neq \emptyset$. Das bedeutet, daß X_{i_0} nicht pseudokonvex ist; dies widerspricht der Voraussetzung. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Für unverzweigte Riemannsche Gebiete hat K. Oka folgenden tiefliegenden Satz bewiesen: Ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet ist genau dann Holomorphiegebiet, wenn es pseudokonvex ist. Damit folgt aus Satz 1:

Satz 2 : Ist (G_i, ϕ_i, C^n) , $i \in I$, eine aufsteigende Folge von unverzweigten Holomorphiegebieten, dann ist auch $\lim G_i$ ein Holomorphiegebiet.

Der Satz von Oka gilt auch noch für unverzweigte Gebiete über Steinschen Mannigfaltigkeiten. Daher folgt aus Satz 1:

Satz 2' : Ist (X_i, ϕ_i, S) , $i \in I$, eine aufsteigende Folge von unverzweigten Holomorphiegebieten über einer Steinschen Mannigfaltigkeit S , so ist $\lim X_i$ ein Holomorphiegebiet.

Es gilt weiter:

Satz 3 : Es sei (G_i, ϕ_i, C^n) , $i \in I$, eine konvergente Folge von unverzweigten Holomorphiegebieten. Dann ist auch das Grenzgebiet $\lim_{i \in I} G_i$ ein Holomorphiegebiet.

Beweis: Der Durchschnitt von Holomorphiegebieten ist wieder ein Holomorphiegebiet. Aus Satz 2 und der Definition des Limes folgt dann die Behauptung.

b) Die Stetigkeit der Hüllenzuordnung.

Man kann bekanntlich jedem unverzweigten Riemannschen Gebiet eine unverzweigte Holomorphiehülle zuordnen ([14], [2], [3]). Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Zuordnung "stetig" ist. Für schlichte Gebiete mit schlichten Hüllen wurden die folgenden Aussagen bereits von H. Behnke und K. Stein [1] bewiesen.

Satz 4 : Es sei (G_i, ϕ_i, C^n) , $i \in I$, eine konvergente Folge von unverzweigten Riemannschen Gebieten mit $\lim G_i =: G$. Es gelte $G_i \subset G$ für alle $i \in I$. Dann konvergiert auch die Folge der Holomorphiehüllen $H(G_i)$ und es gilt: $\lim H(G_i) = H(\lim G_i)$.

Beweis: Es sei I' eine konfinale Teilmenge von I ; $\bar{I}'$ sei die zugeordnete gerichtete Menge. Zu jedem $J \in \bar{I}'$ bilden wir

$$D_J := \bigcap_{i \in J} G_i \quad \text{und} \quad E_J := \bigcap_{i \in J} H(G_i).$$

(a) Es ist $G_i \subset H(G_i)$. Wegen (D 3) gilt $D_J \subset E_J$, also nach (L 3) $\lim D_J \subset \lim E_J$, d.h. $G \subset \lim E_J$. Aus Satz 3 folgt, daß $\lim E_J$ Holomorphiegebiet ist. Daher ist $H(G) \subset \lim E_J$.

(b) Nach Voraussetzung ist $G_i \subset G$, also $H(G_i) \subset H(G)$. Wegen (D 3) gilt $E_J \subset H(G)$ und nach (L 3) $\lim E_J \subset H(G)$.

Aus (a) und (b) folgt $\lim_{J \in \bar{I}'} E_J = H(G)$. Dies gilt für jede beliebige konfinale Indexmenge I' von I . Das bedeutet nach Defi-

nition des Limes, daß $H(G_i)$ konvergiert und daß gilt:

$$\lim_{i \in I} H(G_i) = H(G).$$

Zusatz: Aus dem Beweis geht hervor, daß in Satz 4 die Voraussetzung $G_i < G$ durch die schwächere Voraussetzung $H(G_i) < H(G)$ ersetzt werden kann.

Wir wollen noch untersuchen, ob für beliebige konvergente Folgen G_i gilt: $\lim H(G_i) = H(\lim G_i)$. Das folgende Beispiel zeigt, daß dies nicht der Fall ist.

Beispiel: Es sei $G := \{ |z_1| < 1, |z_2| < 1 \} \subset C^2$ und $G_v := \{ |z_1| < 1, |z_2| < 1 \} \cup \{ 1 \leq |z_1| < 2, 1 - \frac{1}{v} < |z_2| < 1 \} \quad (v=1,2,\dots)$. Dann ist $\lim G_v = G$, $H(G) = G$ und $H(G_v) = \{ |z_1| < 2, |z_2| < 1 \}$, also $\lim H(G_v) = \{ |z_1| < 2, |z_2| < 1 \} \neq H(G)$. Es sei noch darauf hingewiesen, daß dieses Gebiet G keine Nebenhülle (s. Def. 9) besitzt. Man kann natürlich auch eine Folge G'_v mit $\lim G'_v = G$ konstruieren, so daß die Folge $H(G'_v)$ nicht konvergiert; man wähle etwa $G'_{2v} := G_{2v}$ und $G'_{2v+1} := G$.

Dieses Beispiel zeigt außerdem, daß eine Folge von Gebieten G_v von außen gegen ein Grenzgebiet G konvergieren kann, ohne daß die Randdistanz von G bezüglich G_v gegen 0 strebt. Wir führen daher einen verschärften Begriff der Konvergenz ein:

Def. 8 : Wir sagen, eine Folge von unverzweigten Gebieten (X_i, ϕ_i, C^n) , $i \in I$, sei stark konvergent gegen ein unverzweigtes Gebiet (X, ϕ, C^n) , wenn gilt:

- 1) X_i konvergiert (im Sinne der Def. auf Seite 14) gegen X .
- 2) Zu jedem unverzweigten Holomorphiegebiet (Y, ψ, C^n) mit $X \ll Y$ existiert ein $i_0 \in I$, so daß für alle $i > i_0$ gilt: $X_i < Y$.

Wir schreiben für die starke Konvergenz: $X = \text{LIM } X_i$.

Nun erklären wir:

Def. 9 : Es sei (G, ϕ, C^n) ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet; $N(G)$ sei der Durchschnitt aller unverzweigten Holo-

morphiegebiete $(R, \mathcal{V}, C^n)$, für die gilt: $G \ll R$. Ist $N(G) \neq H(G)$, so heißt $N(G)$ die Nebenhülle von G .

Einfache Beispiele zeigen, daß es Gebiete mit einer Nebenhülle gibt; es sei etwa $G := \{ |z_1| < |z_2|, |z_2| < 1 \}$, dann ist $H(G) = G$, $N(G) = \{ |z_1| < 1, |z_2| < 1 \}$. Bilden wir die Folge $G_\nu := \{ |z_1| < |z_2| + \frac{1}{\nu}, |z_2| < 1 \}$, so gilt $G = \lim G_\nu$. Es ist aber $H(G_\nu) = \{ |z_1| < 1, |z_2| < 1 \}$, also $\lim H(G_\nu) \neq H(G)$. (Vgl. [1]).

Setzen wir jedoch voraus, daß die approximierende Folge stark konvergiert und das Grenzgebiet keine Nebenhülle besitzt, so gilt:

Satz 5 : Es sei (G, ϕ, C^n) ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet, das keine Nebenhülle besitzt. Ist dann $(G_i, \phi_i, C^n), i \in I$, eine stark konvergente Folge mit $\lim G_i = G$, so ist auch die Folge der $H(G_i)$ stark konvergent und es gilt $\lim H(G_i) = H(\lim G_i)$.

Beweis: I' sei eine konfinale Teilmenge von I . $\overline{I'}, J', D_J$, und E_J , sollen dieselbe Bedeutung haben wie im Beweis zu Satz 4. (a) Aus dem Beweis von Satz 4, (a), ergibt sich $H(G) < \lim E_J$. (b) G besitzt keine Nebenhülle; daher gibt es eine Folge von Holomorphiegebieten $R_\nu, \nu = 1, 2, \dots$, mit $G \ll R_\nu$ und $\lim R_\nu = H(G)$. Zu jedem R_ν gibt es ein $i_0(\nu)$, so daß für alle $i > i_0(\nu)$ gilt $G_i \ll R_\nu$. Dann ist $H(G_i) \ll R_\nu$ für $i > i_0(\nu)$, also auch $E_J \ll R_\nu$ und nach (L 3) $\lim_{J' \in I'} E_J \ll R_\nu$. Nochmalige Anwendung von (L 3) ergibt $\lim_{J' \in I'} E_J \ll \lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu = H(G)$.

Aus (a) und (b) folgt $H(G) = \lim H(G_i)$. Ist Y ein Holomorphiegebiet mit $H(G) \ll Y$, so ist auch $G \ll Y$. Daher gibt es ein $i_0(Y)$, so daß für alle $i > i_0(Y)$ gilt $G \ll Y$; daraus folgt $H(G_i) \ll Y$ für $i > i_0(Y)$, d.h. $H(G) = \lim H(G_i)$.

c) Meromorph-konvexe Gebiete.

Def. 10 : Ein komplexer Raum X heißt meromorph-konvex, wenn zu jedem relativ-kompakten Teilgebiet X_0 ein relativ-kompaktes Teilgebiet X_0^* existiert mit der Eigenschaft: Zu jedem Punkt $x \in X - X_0^*$ gibt es eine Funktion f , die in X meromorph und auf X_0 beschränkt ist, so daß gilt: $|f(x)| > \sup |f(X_0)|$.

Als Anwendung von Satz 2' beweisen wir:

Satz 6 : Jedes meromorph-konvexe unverzweigte Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit ist holomorph-konvex. Für unverzweigte Gebiete über Steinschen Mannigfaltigkeiten sind also die Begriffe meromorph-konvex und holomorph-konvex äquivalent.

Beweis: (X, ϕ, S) sei ein meromorph-konvexes unverzweigtes Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit S . Nach H. Grauert ([7], Satz A) besitzt X abzählbare Topologie. $X_\nu, \nu=1,2,\dots$, sei eine Ausschöpfung von X , so daß gilt: $X_\nu \subset \subset X_{\nu+1} \subset \dots \subset X$. Wir können annehmen, daß jedes zugeordnete Gebiet X_ν^* ganz in $X_{\nu+1}$ liegt. Es sei $\bar{X}_{\nu+1}$ die abgeschlossene Hülle von $X_{\nu+1}$. Ist dann $x \in \bar{X}_{\nu+1} - X_{\nu+1}$, so gibt es eine in X meromorphe Funktion f_x mit der Eigenschaft $|f_x(x)| > 1 > \sup |f_x(X_\nu)|$. Es gibt eine Umgebung $U(x)$, so daß für alle $y \in U(x)$ gilt $|f_x(y)| > 1$. Die Menge $\bar{X}_{\nu+1} - X_{\nu+1}$ ist kompakt; daher gibt es endlich viele Punkte $x_1^{(\nu+1)}, \dots, x_{k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}$, so daß die zugehörigen Umgebungen $\bar{X}_{\nu+1} - X_{\nu+1}$ überdecken. Die zugehörigen Funktionen bezeichnen wir mit $f_x^{(\nu+1)}, x=1, \dots, k_{\nu+1}$. Nun sei P_ν^1 die Menge aller Punkte $x \in X$, die den Ungleichungen $|f_x^{(\nu+1)}(x)| < 1, x=1, \dots, k_{\nu+1}$, genügen. P_ν sei die zusammenhängende Komponente von P_ν^1 , in der X_ν liegt. P_ν ist ein holomorph-konvexer komplexer Raum. Es gilt $X_\nu \subset P_\nu \subset \bar{X}_{\nu+1}$, also ist $\lim P_\nu = X$. Nach Satz 2' ist dann X holomorph-konvex.

2. Holomorphe Abbildungen.

a) Abbildungen in holomorph-vollständige

komplexe Räume.

Sind X und Y komplexe Räume, $\mathcal{R}(X)$ und $\mathcal{R}(Y)$ die Ringe der in X bzw. Y holomorphen Funktionen, so induziert jede holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ einen Homomorphismus ${}^*\tau: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$, wenn man definiert: ${}^*\tau(f) := f \circ \tau$ für $f \in \mathcal{R}(Y)$. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Frage, ob unter gewissen Voraussetzungen jeder Homomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ in $\mathcal{R}(X)$ durch eine holomorphe Abbildung von X in Y erzeugt wird.

R. Remmert hat folgenden tiefliegenden Satz bewiesen:
Zwei holomorph-vollständige komplexe Räume X und Y , deren Ringe holomorpher Funktionen $\mathcal{R}(X)$ und $\mathcal{R}(Y)$ isomorph sind, sind analytisch äquivalent ¹⁾.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist:

Satz 7 : Es seien X und Y komplexe Räume; Y sei holomorph-vollständig. ${}^*\tau: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ sei ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ in $\mathcal{R}(X)$ und für jedes $c \in \mathbb{C}$ gelte ${}^*\tau(c) = c$. Dann existiert eine holomorphe Abbildung $\tau: X \rightarrow Y$ von X in Y , so daß für jede Funktion $f \in \mathcal{R}(Y)$ gilt: ${}^*\tau(f) = f \circ \tau$. τ ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Es sei $\tilde{Y}$ die Menge aller Ideale $\mathfrak{u}$ in $\mathcal{R}(Y)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{R}(Y)/\mathfrak{u} = \mathbb{C}$. ($\mathbb{C}$ sei der Körper der komplexen Zahlen). In $\tilde{Y}$ werde eine Topologie eingeführt durch die Festsetzung: Eine Folge $\mathfrak{u}_\nu \in \tilde{Y}$ konvergiert genau dann gegen einen

1) R. Remmert, [14], Anhang: Satz von Igusa.

Punkt $x \in \tilde{Y}$, wenn für jedes $f \in \mathcal{R}(Y)$ die Folge komplexer Zahlen f/η_v gegen f/η konvergiert. R. Remmert hat bewiesen, daß es dann eine topologische Abbildung $\theta: Y \rightarrow \tilde{Y}$ von Y auf $\tilde{Y}$ gibt ¹⁾. Die Abbildung θ ist dabei folgendermaßen erklärt: $\theta(y)$, $y \in Y$, ist das Ideal aller Funktionen $g \in \mathcal{R}(Y)$ mit $g(y) = 0$.

Wir ordnen nun jedem Punkt $x \in X$ das Ideal η_x aller Funktionen $g \in \mathcal{R}(Y)$ zu, für die gilt: $\ast\tau(g)(x) = 0$. Es sei außerdem $\lambda_x(g) := \ast\tau(g)(x)$; λ_x ist ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ in C . Für jede Konstante $c \in C$ gilt $\lambda_x(c) = \ast\tau(c)(x) = c$. Also ist λ_x ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ auf C . Der Kern $\lambda_x^{-1}(0)$ von λ_x ist das Ideal η_x . Daher ist $\mathcal{R}(Y)/\eta_x = C$. η_x ist also ein Punkt von $\tilde{Y}$. Die Zuordnung $\tilde{\tau}(x) := \eta_x$ ist somit eine Abbildung von X in $\tilde{Y}$. Wir zeigen, daß $\tilde{\tau}$ stetig ist. Es sei $x_v \in X$ und $\lim x_v = x$. Dann ist $\tilde{\tau}(x_v) = \eta_{x_v}$. Für jedes $f \in \mathcal{R}(Y)$ gilt: $f/\eta_{x_v} = \lambda_{x_v}(f) = \ast\tau(f)(x_v)$. Die Funktion $\ast\tau(f) \in \mathcal{R}(X)$ ist in X holomorph, also auch stetig. Daher ist $\lim f/\eta_{x_v} = \lim (\ast\tau(f))(x_v) = (\ast\tau(f))(\lim x_v) = \ast\tau(f)(x) = f/\eta_x$. Nach Definition der Topologie in $\tilde{Y}$ bedeutet das $\lim \eta_{x_v} = \eta_x$ oder $\lim \tilde{\tau}(x_v) = \tilde{\tau}(x)$. Damit ist gezeigt, daß $\tilde{\tau}: X \rightarrow \tilde{Y}$ stetig ist. Also ist auch $\tau := \theta^{-1} \circ \tilde{\tau}: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für jede in Y holomorphe Funktion $f \in \mathcal{R}(Y)$ gilt: $f \circ \tau(x) = f \circ \theta^{-1} \circ \tilde{\tau}(x) = f/\eta_x = \lambda_x(f) = \ast\tau(f)(x)$, $x \in X$. $\ast\tau(f)$ ist eine holomorphe Funktion in X . Aus einem Satz von R. Remmert ([45], Satz 11) folgt, daß dann auch τ holomorph ist. Daher ist τ eine gesuchte Abbildung.

Nun sei $\tau_1: X \rightarrow Y$ eine zweite holomorphe Abbildung mit $f \circ \tau_1 = \ast\tau(f) = f \circ \tau$ für alle $f \in \mathcal{R}(Y)$. Wir nehmen an, es existiere ein Punkt $x \in X$ mit $\tau_1(x) \neq \tau(x)$. Dann gibt es,

1) s. Seite 22, Fußnote 1).

weil Y holomorph-separabel ist, ein $f \in \mathcal{R}(Y)$, so daß gilt:
 $f \circ \tau_1(x) \neq f \circ \tau(x)$; dies widerspricht der Voraussetzung
 $f \circ \tau_1 = f \circ \tau$. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Aus Satz 7 folgt:

Wenn es in einer Menge komplexer Räume, deren Ringe holomorpher Funktionen isomorph sind, einen holomorph-vollständigen Raum gibt, so ist dieser der größte, d.h. jeder andere kann in natürlicher Weise in ihn abgebildet werden. Für die Bildung von Holomorphiehüllen bedeutet das: Eine holomorph-vollständige Hülle ist unter allen möglichen "Hüllen" die größte. Falls man also zu einem unverzweigten Riemannschen Gebiet auf irgend eine Weise "Hüllen" definiert, so sind diese sicher nicht größer als die von P. Thullen erklärte Holomorphiehülle, denn diese ist holomorph-vollständig.

Unter den Voraussetzungen von Satz 7 gilt:

Satz 8a : Die Bildmenge $\tau(X)$ ist genau dann analytisch dünn in Y , wenn τ nicht injektiv ist.

Beweis: Wenn $\tau(X)$ in einer in Y analytischen Menge $M \neq Y$ enthalten ist, so gibt es, weil Y holomorph-vollständig ist, eine Funktion $f \in \mathcal{R}(Y)$, $f \not\equiv 0$, so daß $f(\tau(X)) = 0$ ist.¹⁾ f gehört also zu $\tau^{-1}(0)$, daher ist τ nicht injektiv. Die Umkehrung ergibt sich aus der Tatsache, daß $\tau(X)$ im Nullstellengebilde von $\tau^{-1}(0)$ enthalten ist.

Satz 8b : Ist X holomorph-separabel und $\tau: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ surjektiv, so ist τ eine eindeutige Abbildung von X in Y .

Beweis: Sind x_1, x_2 zwei verschiedene Punkte von X , so gibt es dazu ein $f \in \mathcal{R}(X)$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$. Andererseits existiert, weil τ surjektiv ist, ein $g \in \mathcal{R}(Y)$ mit $f = g \circ \tau$. Dann ist $g(\tau(x_1)) \neq g(\tau(x_2))$, also sicher $\tau(x_1) \neq \tau(x_2)$.

1) Vgl. [1], Satz 2.

Satz 8c : Ist X holomorph-konvex und $\tau: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ surjektiv, so ist τ eine eigentliche Abbildung. Die Bildmenge $\tau(X)$ ist das genaue Nullstellengebilde des Ideals $\tau^*(0)$.

Beweis: Es sei K eine kompakte Teilmenge von Y und f eine beliebige Funktion aus $\mathcal{R}(X)$. Dann existiert ein $g \in \mathcal{R}(Y)$ mit $f = g \circ \tau$. Es gilt $|f(\tau^{-1}(K))| = |g(\tau(\tau^{-1}(K)))| \leq |g(K)|$, weil $\tau(\tau^{-1}(K)) \subset K$ ist. $|g(K)|$ ist beschränkt, weil K kompakt ist; also ist auch $|f(\tau^{-1}(K))|$ beschränkt. Außerdem ist $\tau^{-1}(K)$ abgeschlossen, weil τ stetig ist. Aus einem Satz von H. Cartan folgt dann, daß $\tau^{-1}(K)$ kompakt ist ¹⁾. - Ein Satz von R. Remmert besagt, daß $\tau(X)$ eine analytische Menge in Y ist ²⁾. $\tau(X)$ ist also das genaue Nullstellengebilde von endlich vielen Funktionen aus $\tau^*(0)$. Andererseits ist $\tau(X)$ im Nullstellengebilde von $\tau^*(0)$ enthalten. Daraus ergibt sich die Behauptung.

b) Fortsetzung holomorpher Abbildungen.

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen untersucht man häufig, unter welchen Bedingungen alle in einem Gebiet holomorphen Funktionen in ein größeres Gebiet fortsetzbar sind. Man kann nun das entsprechende Problem nicht nur für Funktionen, sondern für holomorphe Abbildungen betrachten, wobei wir als Bildraum an Stelle der komplexen Ebene einen beliebigen holomorph-vollständigen komplexen Raum zulassen. Es zeigt sich, daß die Gesamtheit aller holomorphen Abbildungen in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum genau dann fortsetzbar ist, wenn alle holomorphen Funktionen eindeutig

1) H. Cartan, [5], IX, théorème 1; s. auch R. Remmert, [14].

2) R. Remmert, [15], Satz 23.

fortgesetzt werden können.

Es gilt:

Satz 9 : Es seien X_1 und X_2 komplexe Räume, φ eine holomorphe Abbildung von X_1 in X_2 . Der induzierte Homomorphismus $\ast\varphi$ sei ein Isomorphismus von $\mathcal{R}(X_2)$ auf $\mathcal{R}(X_1)$. Ist dann $\tau_1: X_1 \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung von X_1 in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum Y , so ist τ_1 nach X_2 fortsetzbar, d.h. es gibt eine holomorphe Abbildung $\tau_2: X_2 \rightarrow Y$ mit

$$\tau_1 = \tau_2 \circ \varphi.$$

Beweis: $\ast\varphi^{-1} \circ \ast\tau_1$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ in $\mathcal{R}(X)$. Nach Satz 7 existiert dann eine holomorphe Abbildung $\tau_2: X \rightarrow Y$, so daß für jedes $f \in \mathcal{R}(Y)$ gilt: $\ast\varphi^{-1} \circ \ast\tau_1(f) = f \circ \tau_2$. Daraus folgt $\ast\tau_1(f) = \ast\varphi(f \circ \tau_2)$ oder $f \circ \tau_1 = f \circ \tau_2 \circ \varphi$. Wir nehmen an, es existiere ein $x \in X_2$ mit $\tau_1(x) \neq \tau_2 \circ \varphi(x)$. Dann gibt es, weil Y holomorph-separabel ist, ein $f \in \mathcal{R}(Y)$ mit $f \circ \tau_1(x) \neq f \circ \tau_2 \circ \varphi(x)$. Dies widerspricht der Gleichung $f \circ \tau_1 = f \circ \tau_2 \circ \varphi$. Also gilt $\tau_1(x) = \tau_2 \circ \varphi(x)$ für alle $x \in X_2$. τ_2 ist nach Satz 7 eindeutig bestimmt.

Die Voraussetzung über $\ast\varphi$ kann noch etwas abgeschwächt werden. Man benützt beim Beweis von Satz 9 nur, daß $\ast\varphi$ ein Isomorphismus von $\ast\varphi^{-1}(\ast\tau_1(\mathcal{R}(Y)))$ auf $\ast\tau_1(\mathcal{R}(Y))$ ist. Es ist daher nicht notwendig, vorauszusetzen, daß alle in X_1 holomorphen Funktionen nach X_2 fortgesetzt werden können. Es genügt, wenn jede in X_2 holomorphe Funktion, die nach Y fortsetzbar ist, auch eindeutig nach X_2 fortgesetzt werden kann; genauer: Zu jedem $f \in \mathcal{R}(Y)$ soll es eine und nur eine Funktion $g \in \mathcal{R}(X_2)$ geben, so daß $g \circ \varphi = f \circ \tau_1$ gilt.

Aus Satz 9 folgt unmittelbar:

Satz 10 : Jede holomorphe Abbildung $\tau: G \rightarrow Y$ eines unverzweigten Riemannschen Gebietes G in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum Y ist in die Holomorphiehülle $H(G)$ fortsetzbar.

Ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet ist also dann und nur dann genaues Existenzgebiet einer holomorphen Abbildung in einen holomorph-vollständigen komplexen Raum, wenn es holomorph-vollständig ist.

Aus Satz 10 folgt weiter:

Satz 11 : Es seien (G_1, ϕ_1, C^{n_1}) und (G_2, ϕ_2, C^{n_2}) unverzweigte Riemannsche Gebiete, $H(G_1)$ und $H(G_2)$ ihre Holomorphiehüllen, γ_i ($i=1,2$) die Abbildungen von G_i in $H(G_i)$. Ist dann $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ eine holomorphe Abbildung von G_1 in G_2 , so existiert eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ von $H(G_1)$ in $H(G_2)$ mit der Eigenschaft: $\tilde{\tau} \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$.

Beweis: $H(G_2)$ ist holomorph-vollständig. Nach Satz 10 gibt es daher zu der Abbildung $\gamma_2 \circ \tau: G_1 \rightarrow H(G_2)$ eine Abbildung $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ mit $\tilde{\tau} \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ \tau$.

Für den Spezialfall, daß τ eine lokal-topologische Abbildung ist, ist Satz 11 seit längerer Zeit bekannt. (s. [6], [5]). In diesem Fall ergibt sich noch, daß dann auch $\tilde{\tau}$ lokal-topologisch ist. Ist τ eine topologische Abbildung von G_1 auf G_2 , so ist $\tilde{\tau}$ eine topologische Abbildung von $H(G_1)$ auf $H(G_2)$. (H. Cartan, [5]). Für nirgends entartete Abbildungen ist eine analoge Aussage falsch. Es sei etwa

$G_1 := \{(z_1, z_2, z_3) : (z_1, z_2) \neq (0,0)\} \subset C_z^3$, $G_2 := C_w^3$ und $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ die Abbildung $w_1 = (z_1 + z_2)z_3$, $w_2 = z_1(1 + z_3)$, $w_3 = z_2(1 - z_3)$. $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ ist nirgends entartet, aber $\tilde{\tau}: H(G_1) = C_z^3 \rightarrow C_w^3 = H(G_2)$ besitzt die Entartungsmenge $\{z_1 = z_2 = 0\}$. (Vgl. dazu H. Grauert und R. Kemmert, [10]).

Für unverzweigte Riemannsche Gebiete gilt aber folgende Aussage:

Ist $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung von G_1 in G_2 , so ist die Entartungsmenge von $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in $H(G_1)$, die keine isolierten Punkte enthält.

Beweis: Die Entartungsmenge von $\tilde{\tau}$ ist nach R. Remmert ([15], Satz 18) eine analytische Menge in $H(G_1)$. Aus einem Satz von H. Grauert und R. Remmert ([10], Satz 7) folgt, daß jede $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge in $H(G_1)$ auch in G_1 eindringt. Daher kann die Entartungsmenge höchstens $(n-2)$ -dimensional sein.

Für zweidimensionale unverzweigte Riemannsche Gebiete (G_i, ϕ_i, C^2) ($i=1,2$) gilt daher: Ist $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ nirgends entartet, so ist auch $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ eine nirgends entartete Abbildung.

Im folgenden Abschnitt behandeln wir das entsprechende Problem für eigentliche Abbildungen.

c) Eigentliche Abbildungen.

Wir gehen von folgender Fragestellung aus: Es sei τ eine eigentliche Abbildung von G_1 in G_2 . Ist dann auch $\tilde{\tau}$ eine eigentliche Abbildung von $H(G_1)$ in $H(G_2)$? Wir werden die Richtigkeit dieser Aussage unter der Voraussetzung beweisen, daß τ eine eigentliche Abbildung von G_1 auf G_2 ist. In einem einfachen Beispiel zeigen wir, daß diese Voraussetzung wesentlich ist: Es sei $G_1 := \{z: |z| < \frac{1}{2}\}$ und $G_2 := \{(w_1, w_2): |w_1| < 1, |w_2| < 1\} - \{|w_1| \geq \frac{1}{2}, |w_2| \leq \frac{1}{2}\}$, $\tau(z) := (z, 0) \in C_w^2$.

$\tau: G_1 \rightarrow G_2$ ist eigentlich. Es ist $H(G_1) = G_1$, $H(G_2) = \{ |w_1| < 1, |w_2| < 1 \}$. Die Abbildung $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ ist nicht eigentlich.

Zur weiteren Behandlung des Problems benötigen wir eine Charakterisierung der eigentlichen Abbildungen durch Eigenschaften der Ringe der in den Gebieten holomorphen Funktionen.

Es gilt ¹⁾:

Satz 12 : Es sei $\tau: X \rightarrow Y$ eine eigentliche nirgends entartete holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y . Dann ist $\mathcal{R}(X)$ algebraisch über $\mathcal{R}(Y)$ vermöge τ , d.h. zu jeder Funktion $f \in \mathcal{R}(X)$ gibt es Funktionen $c_\sigma \in \mathcal{R}(Y)$, $\sigma=1, \dots, s$ (s nat.Z.), so daß gilt:

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \dots + c_s(\tau(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Beweis: Es gibt nirgends zerlegende analytische Mengen S_1 in X und S_2 in Y , so daß τ eine lokal-topologische eigentliche Abbildung von $X - S_1$ auf $Y - S_2$ ist. (Vgl. dazu K. Stein, [16], Beweis von Hilfssatz 4 und Bemerkung, sowie R. Remmert, [12]). Ist $f \in \mathcal{R}(X)$ und $x \in X$, so wird durch $g := f \circ \tau^{-1}$ in einer Umgebung von $\tau(x)$ eine holomorphe Funktion gegeben. g ist in $Y - S_2$ holomorph fortsetzbar, bleibt dabei im allgemeinen aber nicht eindeutig. Das Mehrdeutigkeitsverhalten wird durch die Funktionselemente $w_1(y), \dots, w_s(y)$ von f in den über $\tau(x) =: y$ liegenden Punkten $x_1, \dots, x_s$ gegeben. Dann sind die elementarsymmetrischen Funktionen $c_\sigma(y) := w_1(y) \cdot \dots \cdot w_\sigma(y) + \dots$ ($\sigma=1, \dots, s$) in $Y - S_2$ holomorph und eindeutig. f ist in ganz X stetig; daher sind die c_σ stetig fortsetzbar nach Y . Nach dem Satz von Riemann ([15]) sind die c_σ eindeutig und holomorph in Y . f erfüllt

1) Vgl. auch [12], Satz 3.

nach Konstruktion der c_ϵ die Gleichung

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \dots + c_s(\tau(x)) = 0, x \in X.$$

Eine Aussage in umgekehrter Richtung stellt der folgende Satz dar:

Satz 13 : X und Y seien komplexe Räume und $\tau: X \rightarrow Y$ sei eine holomorphe Abbildung von X in Y ; $\mathcal{R}(X)$ sei algebraisch über $\mathcal{R}(Y)$ vermöge τ . X sei holomorph-konvex. Dann ist τ eine eigentliche Abbildung.

Beweis: Es sei $L \subset Y$ eine kompakte Menge. Wir zeigen, daß dann auch $\tau^{-1}(L) =: K$ kompakt ist. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{R}(X)$ Funktionen $c_\epsilon \in \mathcal{R}(Y)$, $\epsilon = 1, \dots, s$, so daß gilt

$$f^s(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{s-1}(x) + \dots + c_s(\tau(x)) = 0, x \in X.$$

Ist $|f(x)| \geq 1$, so gilt wegen

$$f(x) = -c_1(\tau(x)) - \frac{c_2(\tau(x))}{f(x)} - \dots - \frac{c_s(\tau(x))}{f^{s-1}(x)},$$

die Abschätzung $|f(x)| \leq |c_1(\tau(x))| + |c_2(\tau(x))| + \dots + |c_s(\tau(x))|$.

Für $x \in K$ ist $\tau(x) \in L$. Wegen der Kompaktheit von L sind die

c_ϵ auf L beschränkt: $|c_\epsilon(y)| \leq M$, $\epsilon = 1, \dots, s$, M reell, $y \in L$;

daher gilt $|c_\epsilon(\tau(x))| \leq M$ für $x \in K$. Daraus folgt

$|f(x)| \leq \max(s \cdot M, 1)$ für alle $x \in K$. Damit haben wir gezeigt,

daß jede Funktion $f \in \mathcal{R}(X)$ auf K beschränkt ist. X ist holo-

morph-konvex. Aus einem Satz von H. Cartan ([5], IX, théorème 1)

folgt dann, daß K kompakt ist.

Das Beweisverfahren von Satz 13 liefert noch:

Satz 14 : Es sei τ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X auf einen komplexen Raum Y ; $\mathcal{R}(X)$ sei algebraisch über $\mathcal{R}(Y)$ vermöge τ . X sei holomorph-konvex. Dann ist auch Y holomorph-konvex.

Beweis: Wir zeigen: Ist N eine abgeschlossene, nichtkompakte Teilmenge von Y , so gibt es eine in Y holomorphe Funktion, die auf N nicht beschränkt ist. τ ist eine stetige Abbildung auf Y , also ist $\tau(N) =: M$ in X nicht kompakt und abgeschlossen. X ist holomorph-konvex, daher gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{R}(X)$, die auf M nicht beschränkt ist. Nach Voraussetzung gibt es Funktionen $c_s \in \mathcal{R}(Y)$ mit $f^s(x) + \dots + c_s(\tau(x)) = 0$, $x \in X$. $f(x)$ ist auf M unbeschränkt, also ist mindestens ein c_s auf $\tau(M) = N$ nicht beschränkt.

Aus Satz 12 und Satz 14 folgt unmittelbar:

Satz 15 : Ist $\tau: X \rightarrow Y$ eine eigentliche nirgends entartete holomorphe Abbildung des holomorph-konvexen Raumes X auf den komplexen Raum Y , so ist auch Y holomorph-konvex.

Wir bemerken noch: Ist X ein K -vollständiger komplexer Raum, so ist jede eigentliche holomorphe Abbildung von X in einen komplexen Raum Y nirgends entartet, weil in X jede kompakte analytische Menge aus endlich vielen Punkten besteht.

Diese Aussagen wenden wir nun auf unverzweigte Riemannsche Gebiete und deren Hüllen an.

Satz 16 : Es seien G_1 und G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete und $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von G_1 auf G_2 . Dann ist auch die Abbildung $\tilde{\tau}: H(G_1) \rightarrow H(G_2)$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von $H(G_1)$ auf $H(G_2)$.

Beweis: Nach Satz 12 ist $\mathcal{R}(G_1)$ algebraisch über $\mathcal{R}(G_2)$. Daher ist auch $\mathcal{R}(H(G_1))$ algebraisch über $\mathcal{R}(H(G_2))$. $H(G_1)$ ist holomorph-konvex. Nach Satz 13 ist dann $\tilde{\tau}$ eigentlich. Aus [45] (Satz 23) folgt $\tilde{\tau}(H(G_1)) = H(G_2)$.

Satz 16 besagt: Ist das unverzweigte Riemannsche Gebiet G_1 eine endlich-blättrige analytisch-verzweigte Überlagerung des unverzweigten Gebietes G_2 , so ist $H(G_1)$ eine analytisch-verzweigte Überlagerung von $H(G_2)$. Wir beweisen nun noch, daß dabei $H(G_1) - G_1$ eine Überlagerung von $H(G_2) - G_2$ ist. (Daraus folgt insbesondere, daß die Anzahl der Blätter von (G_1, τ, G_2) gleich der Anzahl der Blätter von $(H(G_1), \tilde{\tau}, H(G_2))$ ist.)

Satz 17 : Es seien G_1, G_2 unverzweigte Riemannsche Gebiete, $H_1 := H(G_1)$, $H_2 := H(G_2)$ ihre Holomorphiehüllen. Es gelte $G_1 \subset H_1$ und $G_2 \subset H_2$. $\tau: G_1 \rightarrow G_2$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung von G_1 auf G_2 , $\tilde{\tau}: H_1 \rightarrow H_2$ die durch τ induzierte Abbildung. Dann wird $H_1 - G_1$ durch $\tilde{\tau}$ eigentlich auf $H_2 - G_2$ abgebildet.

Beweis: $H_1 - G_1$ ist ein nicht notwendig zusammenhängender Hausdorffscher Raum. Wir zeigen zuerst: $H_1 - G_1$ wird durch $\rho := \tilde{\tau}|(H_1 - G_1)$ eigentlich auf $\tilde{\tau}(H_1 - G_1)$ abgebildet.

Für jede Teilmenge $K_2 \subset \tilde{\tau}(H_1 - G_1)$ gilt $\tilde{\tau}^{-1}(K_2) = \tilde{\tau}^{-1}(K_2) \cap (H_1 - G_1) \subset \tilde{\tau}^{-1}(K_2)$. Ist K_2 kompakt, so ist nach Satz 16 auch $\tilde{\tau}^{-1}(K_2)$ kompakt. $H_1 - G_1$ ist abgeschlossen in H_1 , daher ist auch $\tilde{\tau}^{-1}(K_2) \cap (H_1 - G_1)$ abgeschlossen, also ist $\tilde{\tau}^{-1}(K_2) \cap (H_1 - G_1)$ kompakt; d.h. ρ ist eigentlich.

Nun ist noch nachzuweisen: $\tilde{\tau}(H_1 - G_1) = H_2 - G_2$.

Wegen $\tilde{\tau}(G_1) = G_2$ und $\tilde{\tau}(H_1) = H_2$ gilt $\tilde{\tau}(H_1 - G_1) \supset H_2 - G_2$. Wir nehmen an, es existiere ein Punkt $x_0 \in H_1 - G_1$ mit $y_0 := \tilde{\tau}(x_0) \notin G_2$. Die Menge $\tilde{\tau}^{-1}(y_0)$ besteht aus endlich vielen Punkten. H_1 ist holomorph-separabel, also gibt es eine Funktion $\hat{f} \in \mathcal{R}(H_1)$, die die Menge $\tilde{\tau}^{-1}(y_0)$ separiert. Nach Satz 12 ist $\mathcal{R}(G_1)$ algebraisch über $\mathcal{R}(G_2)$. Zu $f := \hat{f}|_{G_1}$ gibt es also

Funktionen $c_s \in \mathcal{K}(G_2)$ mit

$$f^S(x) + c_1(\tau(x)) \cdot f^{S-1}(x) + \dots + c_S(\tau(x)) = 0, \quad x \in G_1.$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in \tau^{-1}(y_0)$

$$f^S(x) + c_1(y_0) \cdot f^{S-1}(x) + \dots + c_S(y_0) = 0$$

und umgekehrt kommt jede Lösung dieser Gleichung als

Funktionswert von f in einem Punkt $x \in \tau^{-1}(y_0)$ vor. Nun sind

die c_s holomorph fortsetzbar zu $\tilde{c}_s \in \mathcal{K}(H_2)$ und es gilt

$$\tilde{f}^S(x) + \tilde{c}_1(\tau(x)) \cdot \tilde{f}^{S-1}(x) + \dots + \tilde{c}_S(\tau(x)) = 0, \quad x \in H_1.$$

Speziell gilt wegen $\tilde{c}_s|_{G_2} = c_s$ und $y_0 \in G_2$

$$\tilde{f}^S(x) + c_1(y_0) \cdot \tilde{f}^{S-1}(x) + \dots + c_S(y_0) = 0 \quad \text{für } x \in \tau^{-1}(y_0).$$

Alle Lösungen dieser Gleichungen kommen aber bereits als

Funktionswerte von f in $\tau^{-1}(y_0)$ vor. Das bedeutet, daß $\tilde{f}$

in allen Punkten von $\tau^{-1}(y_0)$, also auch in x_0 , nur Werte

annimmt, die bereits in den Punkten von $\tau^{-1}(y_0)$ als Funktions-

werte vorkommen. Das heißt, daß $\tilde{f}$ die Menge $\tau^{-1}(y_0)$ nicht

separiert, im Gegensatz zur Wahl von $\tilde{f}$. Damit ist Satz 17

bewiesen.

3. Holomorphiehüllen zu verzweigten

Riemannschen Gebieten.

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, zu Riemannschen Gebieten, die Verzweigungspunkte als innere Punkte enthalten dürfen, Holomorphiehüllen zu definieren und deren Existenz nachzuweisen.

Def. 11 : Ein Riemannsches Gebiet $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, C^n)$ heißt die ϕ -Hülle des Riemannschen Gebiets (X, ϕ, C^n) , wenn gilt:

a) Es gibt eine nirgends entartete holomorphe Abbildung

$\varphi: X \rightarrow \tilde{X}$ mit $\phi = \tilde{\phi} \circ \varphi$, so daß der durch φ induzierte

Homomorphismus $\ast\psi: \mathcal{R}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{R}(\tilde{X})$ auf $\mathcal{R}(X)$ ist.

b) Zu jedem Riemannschen Gebiet $(Y, \mathcal{V}, C^n)$, zu dem es eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\psi: X \rightarrow Y$ mit $\phi = \psi \circ \varphi$ gibt, so daß $\ast\psi: \mathcal{R}(Y) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{R}(Y)$ auf $\mathcal{R}(X)$ ist, existiert eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\tau: Y \rightarrow \tilde{X}$, so daß gilt: $\varphi = \tau \circ \psi$.

Für die ϕ -Hülle schreiben wir kurz $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$.

Grundlegend für die Bildung unverzweigter Hüllen ist ein Satz von H. Cartan ([5], VIII, théorème 1, vgl. auch [3], [6] und [11]), der sich auf unverzweigte Gebiete beschränkt. Wir beweisen die entsprechende Aussage für beliebige (verzweigte) Gebiete.

Satz 18 ¹⁾: Es sei (X, ϕ, B) ein Gebiet über einem komplexen Raum B und $\mathcal{F}$ eine Menge holomorpher Abbildungen $f: X \rightarrow Y_f$ von X in komplexe Räume Y_f . Dann gibt es ein Gebiet $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, B)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) Es gibt eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\varphi: X \rightarrow \tilde{X}$ mit $\phi = \tilde{\phi} \circ \varphi$, so daß jede Abbildung $f \in \mathcal{F}$ nach $\tilde{X}$ fortsetzbar ist.

b) Ist $(Y, \mathcal{V}, B)$ ein Gebiet und gibt es eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\psi: X \rightarrow Y$ mit $\phi = \psi \circ \varphi$, so daß jede Abbildung $f \in \mathcal{F}$ nach Y fortsetzbar ist, so existiert eine holomorphe Abbildung $\tau: Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $\varphi = \tau \circ \psi$.

Für das Gebiet $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, B)$ schreiben wir $\tilde{H}(X, \phi, B; \mathcal{F})$.

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zuerst wird der Raum $\tilde{X}$ konstruiert und mit einer komplexen Struktur

1) Diese Aussage wurde auch von R. Iwahashi: Domains spread on a complex space (Journ. Math. Soc. of Japan, 9, 4, Oct. 1957) bewiesen; vgl. auch G. Scheja.

versehen. Dann zeigen wir, daß $\tilde{X}$ die geforderten Eigenschaften besitzt.

1. Es sei X_0 das Teilgebiet von X , auf dem ϕ lokal-topologisch abbildet. $(X_0, \phi|_{X_0}, B)$ ist ein unverzweigtes Gebiet; die Abbildungen $f \in \mathcal{F}$ sind in X_0 holomorph. Nach dem Satz von H. Cartan ([5] VI, théorème 1) existiert dazu das maximale unverzweigte Gebiet $(\tilde{X}_0, \tilde{\phi}_0, B)$, in das die Abbildungen aus $\mathcal{F}$ fortgesetzt werden können zu einer Menge von Abbildungen $\tilde{\mathcal{F}}_0$.

Nun sei $\tilde{X}_1$ die Menge aller Filter r auf $\tilde{X}_0$, die einen Randpunkt von $(\tilde{X}_0, \tilde{\phi}_0, B)$ definieren und für die gilt: Für jede Abbildung $\tilde{f}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_0$ konvergiert das Filter $\tilde{f}_0(r)$.

Dann ist $\tilde{X}_2 := \tilde{X}_0 \cup \tilde{X}_1$ als Teilmenge von $\tilde{X}_0$ mit einer Topologie versehen. Die Abbildung $\tilde{\phi}_0$ ist zu einer Abbildung $\tilde{\phi} : \tilde{X}_2 \rightarrow B$ stetig fortsetzbar.

Es sei $\tilde{X}$ die Menge aller Punkte $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$, die folgende Bedingung ($\tilde{U}$) erfüllen:

($\tilde{U}$) zu $\tilde{x}$ existiert eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{x}) \subset \tilde{X}_2$, so daß $\tilde{\phi}|_{\tilde{U}(\tilde{x})}$ eine nirgends entartete eigentliche Abbildung von $\tilde{U}(\tilde{x})$ auf eine offene Menge $Z \subset B$ ist.

$\tilde{X}$ ist, versehen mit der induzierten Topologie, ein lokal-kompakter Hausdorffscher Raum. Jede Abbildung $\tilde{f}_0 \in \tilde{\mathcal{F}}_0$ ist stetig fortsetzbar zu einer Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y_f$. Die Menge dieser Abbildungen sei mit $\tilde{\mathcal{F}}$ bezeichnet.

Wir führen nun in $\tilde{X}$ eine komplexe Struktur ein.

Zu jedem Punkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es eine Umgebung $\tilde{U}$, die durch $\tilde{\phi}|_{\tilde{U}}$ eigentlich und nirgends entartet auf eine offene Menge $Z \subset B$ abgebildet wird. Wir dürfen annehmen, daß Z zu einer komplexen Karte $(Z, \gamma, \kappa, \varphi, L, M)$ von B gehört. Außerdem können wir voraussetzen, daß $\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{x})) \cap \tilde{U} = \{\tilde{x}\}$ ist. Dann ist

$\lambda := \varphi \circ \psi \circ \tilde{\phi}$ eine stetige eigentliche nirgends entartete Abbildung von $\tilde{U}$ auf einen Polyzylinder E . Die Menge $\tilde{N} := \tilde{U} \cap (\tilde{X} - \tilde{X}_0)$ zerlegt nirgends in $\tilde{U}$. Dann zerlegt $M' := \lambda(\tilde{N})$ nirgends in E und das gleiche gilt für $M \cup M'$. Daher zerlegt $\lambda^{-1}(M \cup M')$ nirgends in $\tilde{U}$. Die Abbildung λ ist auf $\tilde{U} - \lambda^{-1}(M \cup M')$ lokal-topologisch. Wenn wir noch eine analytische Menge N in Z finden können mit $N \neq Z$ und $\tilde{\phi}(\tilde{N}) \subset N$, dann gilt: λ ist eine lokal-topologische Abbildung von $\tilde{U} - \lambda^{-1}((\varphi \circ \psi(N)) \cup M)$ auf $E - ((\varphi \circ \psi(N)) \cup M)$. $\varphi \circ \psi$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung von Z auf E ; nach einem Satz von R. Remmert ([15], Satz 23) ist $\varphi \circ \psi(N)$ eine analytische Menge in E . Dann ist auch $(\varphi \circ \psi(N)) \cup M$ eine analytische Menge in E und $(\tilde{U}, \lambda, E, (\varphi \circ \psi(N)) \cup M)$ ist eine analytisch-verzweigte Überlagerung von E .

Wir haben also nur noch eine analytische Menge N in Z mit $N \neq Z$ und $\tilde{\phi}(\tilde{N}) \subset N$ zu konstruieren. Dazu benötigen wir eine Funktion, die eine Faser $\tilde{\phi}^{-1}(z) \cap \tilde{U}$, $z \in Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$, separiert.

Es sei $z \in Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ und $\{x_1(z), \dots, x_s(z)\} = \tilde{\phi}^{-1}(z) \cap \tilde{U}^{-1}$ seien die über z liegenden Punkte von $\tilde{U}$. Nach Konstruktion von $\tilde{X}_0$ (s. H. Cartan, [5]) gibt es zu $x_1(z)$, $x_2(z)$ eine Abbildung $\tilde{f}_{12} \in \tilde{\mathcal{F}}$, die in diesen Punkten verschiedene Elemente besitzt. Daher gibt es in beliebiger Nähe von z ein $z' \in Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$, so daß $\tilde{f}_{12}(x_1(z')) \neq \tilde{f}_{12}(x_2(z'))$ ist. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}_{12}$ gibt es sogar eine ganze Umgebung W von z' , so daß für alle $z'' \in W$ gilt $\tilde{f}_{12}(x_1(z'')) \neq \tilde{f}_{12}(x_2(z''))$. Man kann ein $z'' \in W$ so wählen, daß dazu ein $\tilde{f}_{13} \in \tilde{\mathcal{F}}$ existiert mit $\tilde{f}_{13}(x_1(z'')) \neq \tilde{f}_{13}(x_3(z''))$. Auf diese Weise erhalten wir nach endlich vielen Schritten Punkte $x_1, \dots, x_s$, die über einem Punkt

1) Die Abbildung $\tilde{\phi}|\tilde{U} - \tilde{N}$ ist lokal-topologisch. Daher sind in einer Umgebung von z die $x_i(z)$ als Umkehrabbildungen von $\tilde{\phi}$ erklärt.

$z_0 \in Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ liegen, so daß zu je zwei Punkten $x_{\epsilon_1}, x_{\epsilon_2} \in \{x_1, \dots, x_s\}$ eine Abbildung $\tilde{f}_{\epsilon_1, \epsilon_2} \in \tilde{\mathcal{F}}$ existiert mit $\tilde{f}_{\epsilon_1, \epsilon_2}(x_{\epsilon_1}) \neq \tilde{f}_{\epsilon_1, \epsilon_2}(x_{\epsilon_2})$. Die Abbildung $f := (\tilde{f}_{12}, \tilde{f}_{13}, \dots, \tilde{f}_{s-1, s}) : \tilde{U} \rightarrow Y_{f_{12}} \times Y_{f_{13}} \times \dots \times Y_{f_{s-1, s}} =: Y$ bildet dann die Punkte $x_1, \dots, x_s$ auf s verschiedene Punkte in Y ab. f ist in $\tilde{U}$ stetig, weil die $\tilde{f}_{\epsilon_1, \epsilon_2}$ stetig sind. In $\tilde{U} - \tilde{N}$ ist bereits eine komplexe Struktur erklärt und die Abbildungen aus $\tilde{\mathcal{F}}$ sind holomorph bezüglich dieser komplexen Struktur. Daher ist auch f holomorph in $\tilde{U} - \tilde{N}$. $\tilde{\phi}$ bildet $\tilde{U} - \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{N}))$ eigentlich, lokal-topologisch und holomorph auf $Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ ab. Wir können Hilfssatz 2 anwenden: $S(f)$ ist nach Konstruktion von f eine echte Teilmenge von $Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$.

Der komplexe Raum Y genügt der C-Bedingung. Daher gibt es eine Umgebung A von $f(\tilde{x})$ und endlich viele in A holomorphe Funktionen h_x , die A separieren. $\tilde{f}^{-1}(A)$ ist eine Umgebung von $\tilde{x}$. Dann existiert eine Umgebung Z' von $\tilde{\phi}(\tilde{x})$ mit $\tilde{\phi}^{-1}(Z') \cap \tilde{U} \subset \tilde{f}^{-1}(A)$ (wegen [16], Hilfssatz 1). Nach Hilfssatz 2 ist $S(f)$ eine dünne Teilmenge von Z ; daher ist $S(f) \cap Z' \neq Z'$. Also gibt es ein $z'_0 \in Z' - S(f) \cap Z'$, und f separiert die Menge $\tilde{\phi}^{-1}(z'_0) \cap \tilde{U}$. Für $\tilde{\phi}^{-1}(Z') \cap \tilde{U} =: \tilde{U}'$, $Z' \cap E' =: E'$ liegt die gleiche Situation vor wie für $\tilde{U}$, Z , E . Wir schreiben daher an Stelle von $\tilde{U}'$, Z' , E' wieder $\tilde{U}$, Z , E . Somit können wir annehmen, daß $f(\tilde{U})$ in A liegt. Eine geeignete Linearkombination h der h_x separiert die Punkte $f(x_1), \dots, f(x_s)$. Die Funktion $g := h \circ f$ ist in $\tilde{U}$ stetig und in $\tilde{U} - \tilde{N}$ holomorph. g separiert die Punkte $x_1, \dots, x_s$.

Wenden wir Satz 12 auf $\tilde{U} - \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{N}))$, $\tilde{\phi}, Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ an, so folgt, daß g einer Gleichung

$$g^s(x) + c_1(\tilde{\phi}(x)) \cdot g^{s-1}(x) + \dots + c_s(\tilde{\phi}(x)) = 0, \quad x \in \tilde{U} - \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(\tilde{N})),$$

genügt, wobei die Koeffizienten c_i in $Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ holomorph sind.

Die Funktion g ist stetig in ganz $\tilde{U}$. Daher sind die c_i stetig fortsetzbar nach Z und die Gleichung gilt für alle $x \in \tilde{U}$. Die Diskriminante D_g dieser Gleichung ist in Z stetig und in $Z - \tilde{\phi}(\tilde{N})$ holomorph. In jedem Punkt von $\tilde{\phi}(\tilde{N})$ verschwindet D_g . Aus dem verallgemeinerten Satz von Radó (Zehnke-Stein, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Ann. 124, 1-16 (1951)) folgt, daß D_g in ganz Z holomorph ist. $\tilde{\phi}(\tilde{N})$ ist im Nullstellengebilde N von D_g enthalten. D_g ist nicht identisch null, weil g in s übereinanderliegenden Punkten s verschiedene Werte annimmt. Daher ist $K \neq Z$. Damit haben wir eine analytische Menge N mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Die analytisch-verzweigte Überlagerung $(\tilde{U}, \lambda, \alpha, (\varphi \circ \psi(N)) \cup M)$ definiert eine komplexe Karte von $\tilde{X}$. Die Verträglichkeitsbedingung für zwei auf diese Weise erklärte Karten ist trivialerweise erfüllt, weil sie für die komplexen Karten von B erfüllt ist. Damit ist auf $\tilde{X}$ eine komplexe Struktur erklärt. Die Abbildungen aus $\tilde{\mathcal{F}}$ und $\tilde{\phi}$ sind holomorph bezüglich dieser komplexen Struktur, weil sie in $\tilde{X}$ stetig und in $\tilde{X}_0$ holomorph sind (s. [15], Satz von Riemann). $(\tilde{X}, \tilde{\phi}, E)$ ist dann ein Gebiet über B .

2. Es sei $(Y, \mathcal{V}, B)$ ein Gebiet über B und $\varphi: X \rightarrow Y$, $\rho = \mathcal{V} \circ \varphi$, eine holomorphe Abbildung, so daß zu jedem $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ eine holomorphe Abbildung g existiert mit $f = g \circ \varphi$.

Ist Y_0 das Teilgebiet von Y , auf dem $\mathcal{V}$ lokal-topologisch abbildet, so gibt es nach Konstruktion von $\tilde{X}_0$ eine holomorphe Abbildung $\tau_0: Y_0 \rightarrow \tilde{X}_0$ mit $\mathcal{V} = \tilde{\phi} \circ \tau_0$. Wir beweisen, daß die Abbildung τ_0 zu einer Abbildung $\tau: Y \rightarrow \tilde{X}$, $\tau = \tilde{\phi} \circ \tau$, fortgesetzt werden kann.

Es sei $y \in Y - Y_0$ und $\mathcal{U}_y$ das Filter aller offenen zusammenhängenden Umgebungen von y . Dann besteht das Filter

$\tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{U}_y \cap Y_0$ aus offenen zusammenhängenden Mengen und konvergiert gegen y . $\tilde{\phi} \circ \tau_0(f) = \psi(f)$ konvergiert gegen $\psi(y) \in B$. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß zwei Fälle möglich sind:

$\alpha)$ $\tau_0(f)$ konvergiert gegen einen Punkt von $\tilde{X}_0$.

$\beta)$ $\tau_0(f)$ besitzt in $\tilde{X}_0$ keinen Häufungspunkt.

Im Fall $\alpha)$ ist klar, daß τ_0 stetig in den Punkt y fortgesetzt werden kann. Im Fall $\beta)$ zeigen wir, daß $\tau_0(f)$ gegen einen Punkt von $\tilde{X} - \tilde{X}_0$ konvergiert: $\tau_0(f)$ erfüllt sicher die Forderungen a), b), c) von Def. 4 (Seite 10). Ist A eine Umgebung von $\psi(y)$, dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}_y$ mit $\psi(U) \subset A$.

$\tau_0(U \cap Y_0)$ liegt dann in genau einer zusammenhängenden Komponente von $\tilde{\phi}^{-1}(A)$. Daher ist auch Forderung d) von Def. 4 erfüllt. Also konvergiert $\tau_0(f)$ gegen einen Randpunkt r von $(\tilde{X}_0, \tilde{\phi}|_{X_0}, B)$. Das Filter $g(f)$ konvergiert gegen $g(y)$; dann konvergiert wegen $\tilde{f} \circ \tau_0 = g$ auch $\tilde{f}(\tau_0(f))$; d.h. r gehört zu $\tilde{X}_2$.

Die Abbildung τ_0 ist damit stetig fortgesetzt zu einer Abbildung $\tau: Y \rightarrow \tilde{X}_2$. Wir zeigen, daß sogar $\tau(Y) \subset \tilde{X}$ gilt.

Aus [10], Hilfssatz 3 (s. auch [7], Satz 1) folgt: Es gibt zu jedem Punkt $y \in Y$ eine Umgebung V von y , die durch ψ eigentlich und nirgends entartet auf eine Umgebung Z von $\psi(y)$ abgebildet wird. $\tau(V) =: \tilde{U}$ ist dann eine Umgebung von $\tau(y)$, die durch $\tilde{\phi}$ eigentlich und nirgends entartet auf Z abgebildet wird. Also gehört $\tau(y)$ zu $\tilde{X}$; τ ist die gesuchte Abbildung von Y in $\tilde{X}$.

Setzt man noch $X = Y$, so ergibt sich die Existenz einer Abbildung $\varphi: X \rightarrow \tilde{X}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Damit ist Satz 18 bewiesen.

Es sei nun (X, ϕ, C^n) ein Riemannsches Gebiet und $\mathcal{F} := \mathcal{R}(X)$. Dann folgt aus Satz 18, daß ein maximales Gebiet $\tilde{H}(X, \phi, C^n; \mathcal{R}(X))$ existiert. $\tilde{H}(X, \phi, C^n; \mathcal{R}(X))$ besitzt die Eigenschaften der in Def. 11 erklärten ϕ -Hülle $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$. Es ist klar, daß $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ bis auf eineindeutige spurpunkt-treue holomorphe Abbildungen eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten damit als Folgerung von Satz 18:

Satz 19 ¹⁾: Zu jedem Riemannsches Gebiet (X, ϕ, C^n) existiert genau eine ϕ -Hülle $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$.

Man definiert: Ein Gebiet (X, ϕ, C^n) heißt holomorph-konvex in einem Randpunkt r , wenn es eine Umgebung $\bar{U}(r) \subset \bar{X}$ gibt, so daß $\bar{U}(r) \cap X$ holomorph-konvex ist. Verwenden wir den Begriff des hebbaren Randpunktes, wie er in [10], Def. 5, erklärt wird, so erhalten wir als notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für ϕ -Hüllen:

Ein Gebiet (X, ϕ, C^n) , das mit seiner ϕ -Hülle übereinstimmt, ist in jedem hebbaren Randpunkt holomorph-konvex. Es gibt eine höchstens $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge M in X , so daß jeder Randpunkt, in dem (X, ϕ, C^n) nicht holomorph-konvex ist, Häufungspunkt von M ist.

Beweis: Das Teilgebiet X_0 von X , auf dem ϕ lokal-topologisch abbildet, ist nach Konstruktion der ϕ -Hülle ein unverzweigtes holomorph-konvexes Riemannsches Gebiet. Zu jedem hebbaren Randpunkt $r \in \text{Rd} X$ gibt es eine schlichte Umgebung $\bar{U}(r) \subset \bar{X}$. Daher ist $\bar{U} \cap X \subset X_0$. r ist also auch Randpunkt von $(X_0, \phi|_{X_0}, C^n)$, daher ist (X, ϕ, C^n) in einer Umgebung von r holomorph-konvex. Ist r ein Randpunkt, in dem (X, ϕ, C^n) nicht holomorph-konvex ist, dann ist notwendig $\bar{U} \cap (X - X_0) \neq \emptyset$ für jede Umgebung $\bar{U}$ von r . Also ist r Häufungspunkt der

Verzweigungsmenge $M := X - X_0$.

1) s. Seite 34, Fußnote 1)

Wir wollen noch ein Beispiel angeben ¹⁾: Es sei

$X_1 := \{(z_1, z_2, z_3) : |z_1|^2 + |z_2|^2 > 1\}$ und ϕ die Abbildung $w_1 = (z_1 + z_2) \cdot z_3$, $w_2 = z_1 \cdot (1 + z_3)$, $w_3 = z_2 \cdot (1 - z_3)$ von X_1 in C_w^3 . (X_1, ϕ, C_w^3) ist ein Gebiet. Es ist $\tilde{H}(X_1, \phi, C_w^3) = \{(z_1, z_2, z_3) : (z_1, z_2) \neq (0, 0)\}$. Ist $X_2 := X_1$ und i die Injektion von X_2 in C_z^3 , so ist (X_2, i, C_z^3) ein Gebiet und $\tilde{H}(X_2, i, C_z^3) = C_z^3$. Es sei $\tau: X_2 \rightarrow X_1$ die Identität; dann gibt es sicher keine Abbildung $\tilde{\tau}: \tilde{H}(X_2, i, C_z^3) \rightarrow \tilde{H}(X_1, \phi, C_w^3)$.

Satz 11 gilt also für ϕ -Hüllen nicht. Ein Analogon zu Satz 11 ist nur für spurpunkttreue Abbildungen richtig:

Es seien (X_1, ϕ_1, C^n) und (X_2, ϕ_2, C^n) Riemannsche Gebiete, $\tau: X_1 \rightarrow X_2$ eine holomorphe Abbildung mit $\phi_1 = \phi_2 \circ \tau$. Dann gibt es eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau}: \tilde{H}(X_1, \phi_1, C^n) \rightarrow \tilde{H}(X_2, \phi_2, C^n)$, die mit den vorgegebenen Abbildungen kommutiert.

Beweis: Es ist $\tau(\mathcal{R}(X_2)) \subset \mathcal{R}(X_1)$, also $\tilde{H}(X_1, \phi_1, C^n) = \tilde{H}(X_1, \phi_1, C^n; \mathcal{R}(X_1)) \subset \tilde{H}(X_1, \phi_1, C^n; \tau(\mathcal{R}(X_2))) = \tilde{H}(X_2, \phi_2, C^n)$; daraus folgt die Existenz der Abbildung $\tilde{\tau}$.

Unser Beispiel zeigt, daß die ϕ -Hüllen nicht invariant sind gegenüber umkehrbar holomorphen Abbildungen. Die in Def. 11 erklärte Hülle eines Gebietes (X, ϕ, C^n) hängt vielmehr von der Konkretisierung von X durch die Projektionsabbildung ϕ ab. Daher haben wir diese Hülle auch die ϕ -Hülle genannt. Es ist bekannt, daß die unverzweigte Hülle eines unverzweigten Gebietes invariant gegenüber eindeutigen holomorphen Abbildungen ist. Die unverzweigte Holomorphiehülle ist unabhängig von der Konkretisierung des Gebiets über einem C^n . (s. H. Cartan, [5], VII, théorème 2.) Wir

1) Vgl. [11].

müssen uns also die Frage stellen, ob es auch zu jedem verzweigten Riemannschen Gebiet eine Hülle gibt, die von der Projektionsabbildung in einen C^n unabhängig ist. Dieses Problem wird im nächsten Abschnitt behandelt und die Frage im positiven Sinn beantwortet.

4. Holomorphiehüllen zu K-vollständigen komplexen Räumen.

a) Die Existenz der K-Hülle.

Ein komplexer Raum X heißt K-vollständig, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ endlich viele in X holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k$ gibt, so daß die durch $(f_1, \dots, f_k)$ gegebene Abbildung in einer Umgebung von x nirgends entartet ist.

Wir wollen zu jedem K-vollständigen komplexen Raum eine Holomorphiehülle erklären:

Def. 12 : Ein komplexer Raum $H(X)$ heißt eine K-Hülle des komplexen Raumes X , wenn gilt:

- a) Es existiert eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\alpha: X \rightarrow H(X)$, so daß der induzierte Homomorphismus $*\alpha: \mathcal{R}(H(X)) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ ein Isomorphismus von $\mathcal{R}(H(X))$ auf $\mathcal{R}(X)$ ist.
- b) Zu jedem K-vollständigen komplexen Raum Y , zu dem es eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\beta: X \rightarrow Y$ gibt, die einen Isomorphismus $*\beta$ von $\mathcal{R}(Y)$ auf $\mathcal{R}(X)$ induziert, existiert eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\gamma: Y \rightarrow H(X)$ mit $\alpha = \gamma \circ \beta$.

Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 20 : Zu jedem K-vollständigen komplexen Raum X existiert eine K-Hülle $H(X)$. $H(X)$ ist bis auf analytische Isomorphie eindeutig bestimmt. $H(X)$ ist K-vollständig.

Dem Beweis von Satz 20 stellen wir zwei Hilfssätze voran.

Es seien $\varphi: X \rightarrow C^n$ und $\psi: X \rightarrow C^n$ zwei nirgends entartete holomorphe Abbildungen von X in einen C^n . Wir bilden die φ -Hülle $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ und die ψ -Hülle $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$. Die Abbildung φ ist durch ein n -Tupel holomorpher Funktionen gegeben.

φ ist daher nach $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$ fortsetzbar zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\varphi}$. Es sei $M(\psi, \varphi)$ die Entartungsmenge von $\tilde{\varphi}$ in $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$. Dann ist $G(\psi, \varphi) := \tilde{H}(X, \psi, C^n) - M(\psi, \varphi)$ ein offenes Teilgebiet von $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$ ¹⁾. Entsprechend sei $G(\varphi, \psi)$ das Teilgebiet von $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$, das durch $\tilde{\psi}$ nirgends entartet abgebildet wird. Dann gilt:

Hilfssatz 3 : Es gibt genau eine umkehrbar holomorphe Abbildung τ von $G(\varphi, \psi)$ auf $G(\psi, \varphi)$, die mit den vorgegebenen Abbildungen kommutiert.

Hilfssatz 4 : Ist x_0 ein Punkt von $M(\varphi, \psi)$ und $\mathcal{U}_{x_0}$ das Umgebungsfilter von x_0 in $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$, so besitzt das Filter $\tau(\mathcal{U}_{x_0} \cap G(\varphi, \psi))$ keinen Häufungspunkt in $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$.

Beweis von Hilfssatz 3 : Es sei φ_1 die Abbildung von X in $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$, φ_2 die Projektionsabbildung von $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ in den C^n , $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Entsprechend seien $\psi_1: X \rightarrow \tilde{H}(X, \psi, C^n)$ und $\psi_2: \tilde{H}(X, \psi, C^n) \rightarrow C^n$, $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$, erklärt. $(G(\varphi, \psi), \tilde{\varphi}, C^n)$ ist ein Gebiet, in das alle Funktionen aus $\mathcal{R}(X)$ fortsetzbar sind; daher liegt es in $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$. Das bedeutet, es gibt

1) Vgl. [15], Satz 18

genau eine holomorphe Abbildung τ von $G(\varphi, \psi)$ in $\tilde{H}(X, \psi, C^n)$ mit $\tau \circ \varphi_1 = \psi_1$ und $\psi_2 \circ \tau = \tilde{\psi}$. Ebenso gibt es eine holomorphe Abbildung σ von $G(\psi, \varphi)$ in $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ mit $\sigma \circ \psi_1 = \varphi_1$ und $\varphi_2 \circ \sigma = \tilde{\varphi}$. Es ist sogar $\tau(G(\varphi, \psi)) \subset G(\psi, \varphi)$, weil φ_2 in $G(\varphi, \psi)$, also auch $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \tau$ in $\tau(G(\varphi, \psi))$ nirgends entartet ist. Daher ist τ eine Abbildung von $G(\varphi, \psi)$ in $G(\psi, \varphi)$; ebenso $\sigma: G(\psi, \varphi) \rightarrow G(\varphi, \psi)$. Es gilt $(\tau \circ \sigma) \circ \psi_1 = \psi_1$ und $(\sigma \circ \tau) \circ \varphi_1 = \varphi_1$. Daraus folgt $\tau = \sigma^{-1}$; τ ist also eine umkehrbar holomorphe Abbildung von $G(\varphi, \psi)$ auf $G(\psi, \varphi)$.

Beweis zu Hilfssatz 4 : Die Abbildung τ ist eine topologische Abbildung von $G(\varphi, \psi)$ auf $G(\psi, \varphi)$; daraus folgt, daß $\tau(\mathcal{U}_{x_0} \cap G(\varphi, \psi))$ sicher in $G(\psi, \varphi)$ keinen Häufungspunkt besitzt. Wir haben noch zu zeigen, daß $\tau(\mathcal{U}_{x_0} \cap G(\varphi, \psi))$ auch keinen Punkt von $M(\psi, \varphi)$ als Häufungspunkt hat. Wir dürfen annehmen, daß $\mathcal{U}_{x_0}$ das Filter aller offenen zusammenhängenden Umgebungen von x_0 in $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ ist. Dann besteht das Filter $\mathcal{U}_{x_0} \cap G(\varphi, \psi)$ aus offenen zusammenhängenden Mengen und das gleiche gilt für das Filter $\mathcal{f} := \tau(\mathcal{U}_{x_0} \cap G(\varphi, \psi))$, weil $M(\varphi, \psi)$ eine nirgends zerlegende analytische Teilmenge ¹⁾ von $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ und τ eine topologische Abbildung ist. Die Abbildung $\tilde{\psi}$ ist in ganz $\tilde{H}(X, \varphi, C^n)$ stetig; wegen $\tilde{\psi} = \psi_2 \circ \tau$ konvergiert das Filter $\mathcal{f}$ gegen $\tilde{\psi}(x_0)$. Nehmen wir an, $\mathcal{f}$ besitze in $M(\psi, \varphi)$ einen Häufungspunkt. Dann folgt aus Hilfssatz 1, daß $\mathcal{f}$ gegen einen Punkt $y_0 \in M(\psi, \varphi)$ konvergiert. Wählen wir eine kompakte Umgebung K von y_0 , so gibt es eine Umgebung U von x_0 , so daß $\tau(U \cap G(\varphi, \psi))$ in K liegt. Ist dann $x \in U \cap M(\varphi, \psi)$

1) Vgl. [45], Satz 18.

und $\mathcal{U}_x$ das Filter aller offenen zusammenhängenden Umgebungen von x , so besitzt $\tau(\mathcal{U}_x \cap G(\varphi, \psi))$ in $K \subset \tilde{H}(X, \psi, C^n)$ einen Häufungspunkt. Nochmalige Anwendung von Hilfssatz 1 ergibt, daß τ in eine ganze Umgebung $U(x_0)$ stetig fortsetzbar ist. Ebenso beweist man, daß die Abbildung τ^{-1} in eine Umgebung von y_0 stetig fortsetzbar ist. (Man ersetze τ , x_0, φ durch τ^{-1} , y_0, ψ und wende darauf die gleiche Schlußweise an.) Also bildet τ eine Umgebung von x_0 eindeutig auf eine Umgebung von y_0 ab. Die Abbildung φ_2 ist in x_0 nicht entartet. Aus $\varphi_2 = \tilde{\varphi} \circ \tau$ folgt, daß dann auch $\tilde{\varphi}$ in y_0 nicht entartet ist. y_0 ist aber ein Punkt von $M(\psi, \varphi)$; daher ist y_0 eine Entartungsstelle von $\tilde{\varphi}$. Damit ist ein Widerspruch hergestellt und Hilfssatz 4 bewiesen.

Nun ist der Beweis von Satz 20 leicht zu führen:

Wir bilden $R := \bigcup_{\varphi} \tilde{H}(X, \varphi, C^n)$, wobei φ alle nirgends entarteten holomorphen Abbildungen von X in den C^n durchlaufe. Dann erklären wir in R eine Äquivalenzrelation Z :

Sind x und y zwei Punkte aus R , so gibt es ein φ und ein ψ , so daß gilt: $x \in \tilde{H}(X, \varphi, C^n)$, $y \in \tilde{H}(X, \psi, C^n)$. Wir bilden die Gebiete $G(\varphi, \psi)$ und $G(\psi, \varphi)$. Dazu existiert nach Hilfssatz 3 in eindeutiger Weise die Abbildung $\tau: G(\varphi, \psi) \rightarrow G(\psi, \varphi)$. Wir nennen die Punkte x und y Z -äquivalent ($x \sim y$), wenn $x \in G(\varphi, \psi)$ und $y \in G(\psi, \varphi)$ ist und gilt: $y = \tau(x)$, $x = \tau^{-1}(y)$.

Es ist klar, daß Z wirklich eine Äquivalenzrelation ist.

Wir zeigen nun, daß R/Z ein Hausdorffscher Raum ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt ¹⁾:

1) s. [4], § 7, 17.

- a) Jede Äquivalenzklasse ist abgeschlossen.- Eine Äquivalenzklasse läßt sich darstellen als $\bigcup_{\varphi} x_{\varphi}$, $x_{\varphi} \in \tilde{H}(X, \varphi, C^N)$, wobei φ eine geeignete Menge von Abbildungen durchläuft. Das Komplement von $\bigcup_{\varphi} x_{\varphi}$ ist dann die Vereinigung gewissen $\tilde{H}(X, \varphi, C^N) - \{x_{\varphi}\}$ und $\tilde{H}(X, \varphi, C^N)$. Diese Vereinigung ist offen, weil $\tilde{H}(X, \varphi, C^N) - \{x_{\varphi}\}$ und $\tilde{H}(X, \varphi, C^N)$ offene Mengen in R sind. Daher ist $\bigcup_{\varphi} x_{\varphi}$ abgeschlossen.
- b) Z ist eine offene Zerlegung.- Es sei A eine offene Teilmenge von R . Dann ist die saturierte Hülle von A die Vereinigung von Mengen $\tau_{\varphi\psi}^{-1}(A \cap G(\varphi, \psi))$. Jedes $G(\varphi, \psi)$ ist offen in R , die $\tau_{\varphi\psi}$ sind stetig, also ist $\tau_{\varphi\psi}^{-1}(A \cap G(\varphi, \psi))$ offen. Damit ist auch die saturierte Hülle von A offen.
- c) Die durch Z bestimmte Menge $C := \{(x, y) \in R \times R : x \sim y\}$ ist abgeschlossen in $R \times R$.- Dies ist offenbar dann der Fall, wenn gilt: Sind x und y nicht Z -äquivalent, so gibt es Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$ in R , so daß kein Punkt von U zu einem Punkt von V Z -äquivalent ist. Wir nehmen an, dies sei nicht erfüllt. Dann gibt es zwei Punkte $x_0, y_0 \in R$, die nicht Z -äquivalent sind, und dazu Punkte $x_i, y_i \in R$ mit $\lim x_i = x_0$, $\lim y_i = y_0$ und $x_i \sim y_i$ (i durchlaufe eine geeignete gerichtete Indexmenge). Das bedeutet: Es ist $x_0 \in \tilde{H}(X, \varphi, C^N)$ und $y_0 \in \tilde{H}(X, \psi, C^N)$, $\tau : G(\varphi, \psi) \rightarrow G(\psi, \varphi)$, $\tau(x_i) = y_i$. (Wir können annehmen, daß für alle i gilt: $x_i \in G(\varphi, \psi)$, $y_i \in G(\psi, \varphi)$.) Ist nun $x_0 \in G(\varphi, \psi)$, dann ist notwendig $y_0 = \lim y_i = \lim \tau(x_i) = \tau(x_0)$; also $x_0 \sim y_0$, im Gegensatz zur Voraussetzung, daß x_0 und y_0 nicht Z -äquivalent sein sollen. Ist dagegen $x_0 \in M(\varphi, \psi)$, so besitzt nach Hilfssatz 4 $\tau(x_i) = y_i$ keinen Häufungspunkt in $\tilde{H}(X, \psi, C^N)$. Dies widerspricht der Voraussetzung $\lim y_i = y_0$.

Damit ist gezeigt, daß R/Z ein Hausdorffscher Raum ist. Die Abbildungen τ , durch die die Äquivalenzrelation Z erklärt ist, sind umkehrbar holomorph. Daher trägt R/Z in natürlicher Weise eine komplexe Struktur. Wir setzen $R/Z =: H(X)$ und zeigen, daß R/Z die Eigenschaften einer K -Hülle besitzt:

α) X ist K -vollständig; daher gibt es eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ¹⁾. Es gibt nach Definition der φ -Hülle eine Abbildung von X in $\tilde{H}(X, \varphi, \mathbb{C}^n)$, außerdem eine Abbildung von $\tilde{H}(X, \varphi, \mathbb{C}^n)$ in R und die Abbildung von R in R/Z . Dadurch ist eine Abbildung α von X in R/Z gegeben, die die verlangte Eigenschaft besitzt.

β) Ist Y ein K -vollständiger komplexer Raum mit der Eigenschaft b) von Def. 12, so existiert zu Y eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ ¹⁾. Dann ist die Abbildung $\varphi \circ \beta: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ebenfalls nirgends entartet. Es gibt eine Abbildung von Y in $\tilde{H}(X, \varphi \circ \beta, \mathbb{C}^n)$. Die durch $X \xrightarrow{\beta} Y \rightarrow \tilde{H}(X, \varphi \circ \beta, \mathbb{C}^n) \rightarrow R \rightarrow R/Z$ gegebene holomorphe Abbildung γ erfüllt die Forderung b) von Def. 12.

Aus Def. 12 folgt, daß zwei K -Hüllen von X analytisch äquivalent sind.

Aus der Konstruktion von $H(X)$ ersieht man leicht, daß $H(X)$ K -vollständig ist. Damit ist Satz 20 bewiesen.

Aus dem Beweis von Satz 20 ergibt sich unmittelbar, daß die K -Hülle invariant gegenüber umkehrbar holomorphen Abbildungen ist:

1) Vgl. H. Grauert, [7], Satz A.

Satz 21 : Ist $\lambda: X_1 \rightarrow X_2$ eine eindeutige holomorphe Abbildung des K-vollständigen komplexen Raumes X_1 auf den K-vollständigen komplexen Raum X_2 , so gibt es eine eindeutige holomorphe Abbildung $\tilde{\lambda}: H(X_1) \rightarrow H(X_2)$ von $H(X_1)$ auf $H(X_2)$, so daß gilt: $\alpha_i \circ \lambda = \tilde{\lambda} \circ \alpha_i$. (α_i , $i=1,2$, sei die Abbildung von X_i in $H(X_i)$.)

Wir bemerken noch, daß Satz 10 auch für K-Hüllen gilt:

Satz 10' : X sei ein K-vollständiger, Y ein holomorph-vollständiger komplexer Raum und $\tau: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung von X in Y . Dann ist τ in die K-Hülle $H(X)$ fortsetzbar zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\tau}: H(X) \rightarrow Y$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 9.

b) ϕ -Hülle und K-Hülle.

Es sei (X, ϕ, C^n) ein Riemannsches Gebiet. Dann ist X ein K-vollständiger komplexer Raum. Wir können daher die beiden Hüllen $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ und $H(X)$ bilden. Es gilt:

Satz 22 : $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist ein Teilgebiet von $H(X)$. $H(X) - \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist eine höchstens $(n-1)$ -dimensionale analytische Menge in $H(X)$, die keine isolierten Punkte enthält.

Beweis: Die Abbildung $\phi: X \rightarrow C^n$ ist nach $H(X)$ fortsetzbar zu einer Abbildung $\hat{\phi}: H(X) \rightarrow C^n$. $H(X) - \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist genau die Entartungsmenge von $\hat{\phi}$. Aus einem Satz von R. Remmert ([15], Satz 18) folgt dann die Behauptung.

Daraus ergibt sich:

Satz 23 : Die ϕ -Hülle $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist genau dann gleich der K-Hülle $H(X)$, wenn die Fortsetzung der Abbildung ϕ in $H(X)$ nirgends entartet ist.

H. Grauert und R. Remmert haben an Beispielen gezeigt, daß eine ϕ -Hülle $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ nicht holomorph-konvex zu sein braucht ([10]). Es gilt:

Satz 24 : Ist $\tilde{H}(X, \phi, C^n) \neq H(X)$, so ist $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ nicht holomorph-konvex.

Beweis: Es sei $x_0 \in H(X) - \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ und $x_v \in \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ mit $\lim x_v = x_0$. Dann besitzt die Folge x_v in $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ keinen Häufungspunkt. Jede in $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ holomorphe Funktion f ist auch in $H(X)$ holomorph und daher in einer Umgebung von x_0 beschränkt. Daher ist $|f(x_v)|$ beschränkt und somit $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ nicht holomorph-konvex.

Wie das Beispiel auf Seite 41 zeigt, gibt es K-vollständige komplexe Räume X , die bei einer bestimmten Konkretisierung als Riemannsches Gebiet (X, ϕ_1, C^n) mit ihrer ϕ_1 -Hülle $\tilde{H}(X, \phi_1, C^n)$ übereinstimmen, bei einer anderen Konkretisierung durch eine Abbildung ϕ_2 aber von $\tilde{H}(X, \phi_2, C^n)$ verschieden sind. Die K-Hüllen sind dadurch charakterisiert, daß diese Erscheinung nicht auftritt:

Satz 25 : Für einen K-vollständigen komplexen Raum X gilt $X = H(X)$ dann und nur dann, wenn für jede nirgends entartete holomorphe Abbildung $\phi: X \rightarrow C^n$ $X = \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist.

Der Beweis ist trivial.

Aus der Konstruktion von $\tilde{H}(X, \phi, C^n)$ folgt dann noch:

Ist $X = H(X)$ und $\phi: X \rightarrow C^n$ eine beliebige nirgends entartete holomorphe Abbildung, so ist das Teilgebiet von X , auf dem ϕ lokal-topologisch ist, ein holomorph-vollständiger komplexer Raum.

Wir wollen jetzt zeigen, daß beide Hüllenbegriffe, die ϕ -Hülle und die K -Hülle, Verallgemeinerungen der von P. Thullen konstruierten unverzweigten Hülle eines unverzweigten Riemanschen Gebietes sind.

Satz 26 : Ist (X, ϕ, C^n) ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet, dann gilt immer $\tilde{H}(X, \phi, C^n) = H(X)$. Beide Hüllen stimmen mit der unverzweigten Holomorphiehülle (im Sinne von P. Thullen, [17]) überein.

Beweis: Die Abbildung $\phi: X \rightarrow C^n$ ist lokal-topologisch; also ist die Funktionaldeterminante von ϕ eine in X holomorphe und nicht verschwindende Funktion. Daher ist auch die Funktionaldeterminante der fortgesetzten Abbildung $\hat{\phi}: H(X) \rightarrow C^n$ in $H(X)$ holomorph und von null verschieden. Aus einem Satz von H. Grauert und R. Remmert ([10], Satz 9) folgt dann, daß auch $\hat{\phi}: H(X) \rightarrow C^n$ lokal-topologisch ist. Also ist $(H(X), \hat{\phi}, C^n)$ ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet; somit stimmt $H(X)$ mit der unverzweigten Holomorphiehülle überein. Eine lokal-topologische Abbildung ist insbesondere nirgends entartet. Dann folgt aus Satz 23, daß $H(X) = \tilde{H}(X, \phi, C^n)$ ist.

Ein weiterer Beweis für Satz 26 ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung auf Seite 24.

Wir wollen noch in einem Beispiel andeuten, welche weiteren Aussagen über diese Probleme vielleicht erwartet werden können.

Beispiel: Es sei (G, φ, C^n) ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet; $\varphi: G \rightarrow C^n$ wird also als lokal-topologisch vorausgesetzt. Weiter sei $\phi: G \rightarrow C^n$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung. (G, ϕ, C^n) ist dann ein Riemannsches Ge-

biet. Nach Satz 26 gilt $H(G) = \tilde{H}(G, \phi, C^n)$. Die K -Hülle $H(G)$ ist also holomorph-vollständig. Aus den Bemerkungen auf Seite 28 folgt, daß $H(G) = \tilde{H}(G, \phi, C^n)$ eine höchstens $(n-2)$ -dimensionale analytische Menge in $H(G)$ ist. Den Randpunkten, in denen die ϕ -Hülle $\tilde{H}(G, \phi, C^n)$ nicht holomorph-konvex ist, entsprechen genau die nicht-null-dimensionalen Niveaumengen der in die K -Hülle fortgesetzten Abbildung ϕ . Für die Dimension $n = 2$ ergibt sich in unserem Beispiel: Für jede nirgends entartete holomorphe Abbildung ϕ ist $\tilde{H}(G, \phi, C^2) = H(G)$. In diesem Fall ist also jede ϕ -Hülle $\tilde{H}(G, \phi, C^2)$ holomorph-vollständig.

Literatur.

- [1] H. Behnke und K. Stein: Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität. Math. Ann. 116 (1938)
- [2] H. Behnke und K. Stein: Konvergente Folgen nichtentlichter Regularitätsbereiche. Ann. Mat. pura appl. Ser. IV, Bd. XXVIII (1949)
- [3] H. Behnke und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Ergeb. d. Math. 3,3(1934)
- [4] N. Bourbaki: Topologie générale, Fascicule de résultats. Hermann & Cie, Paris, 1951.
- [5] H. Cartan: Séminaire, Paris 1951-52
- [6] H. Cartan und P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. 106, 617-647 (1932)
- [7] H. Grauert: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 233-259 (1955)
- [8] H. Grauert: Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik. Math. Ann. 131, 38-75 (1956)
- [9] H. Grauert und R. Remmert: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. 129, 274-296 (1955)
- [10] H. Grauert und R. Remmert: Konvexität in der komplexen Analysis. Nicht holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie. Comm. Math. Helv. (1957)
- [11] H. Grauert und R. Remmert: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. Math. Z. 67, 103-128 (1957)
- [12] R. Remmert: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410-441 (1956)

- [13] R. Remmert: Sur des espaces analytiques holomorphiquement
séparables et holomorphiquement convexes.
C.R. Acad. Sci. Paris 243, 118-121 (1956).
- [14] R. Remmert: Habilitationsschrift, Münster (1956)
- [15] R. Remmert: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer
Räume. Math. Ann. 133, 328-370 (1957)
- [16] K. Stein: Analytische Zerlegungen komplexer Räume.
Math. Ann. 132, 63-93 (1956)
- [17] P. Thullen: Zur Theorie der Funktionen zweier komplexen
Veränderlichen. Die Regularitätshüllen.
Math. Ann. 106, 64-76 (1932).

Lebenslauf

Ich, Hans Alois Peter Kerner, bin am 31. August 1932 als Sohn des Regierungsbaurats Hans Kerner und seiner Ehefrau Anna, geb. Wieser, in Landshut geboren. Von 1939 bis 1943 besuchte ich die Volksschule, von 1943 bis 1952 die Oberrealschule in Landshut, die ich im Juli 1952 absovierte.

Seit November 1952 studiere ich an der Universität München Mathematik und Physik. Ich habe Vorlesungen gehört bei den Herrn Professoren Aumann, Bopp, Gerlach, König, Maak, Röhl, R. Schmidt, Seebach, Stein, Perron. Ihnen allen danke ich verbindlichst.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. K. Stein, der mich bei der Abfassung dieser Arbeit durch wertvolle Anregungen und Ratschläge unterstützte.

